OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1914. N° 1.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES SUITES MONOTONES

PAR

J. HJELMSLEV

Introduction.

Le théorème suivant joue un rôle capital pour le fondement de l'analyse infinitésimale:

Une suite monotone de nombres, tous compris dans un intervalle fini et déterminé, a une limite finie et déterminée.

Le présent mémoire concerne des généralisations géométriques directes de ce théorème, généralisations qui sont appelées à jouer, pour la théorie de la courbe générale réelle dans un espace à plusieurs dimensions, un rôle semblable à celui du théorème mentionné pour la théorie des fonctions à une variable.

Une suite monotone de points P_1, P_2, P_3, ... dans un espace R_r à r dimensions est caractérisée par cette propriété que $r+1$ points quelconques de la suite présentent toujours la même orientation dans R_r, les points étant censés dans l'ordre indiqué par la suite même. C'est l'étude des suites de cette espèce qui est l'objet du présent travail; voici un des résultats les plus importants auxquels nous sommes parvenus. En général une suite monotone de points dans un espace R_r possède un seul point limite P déterminé et une »tangente« déterminée et unique, autrement dit il existe une ligne unique et déterminée, position limite de la ligne PP_n quand n croît à l'infini.

D'une manière plus générale, une telle suite possède un »espace osculateur« R_p, pour toute valeur de p donnée, $p = 1, 2, \ldots r - 1$, position limite d'un espace à p dimensions passant par le point limite P et par p points quelconques de la suite, ces p points convergeant tous vers P. Cet espace osculateur R_p peut être défini, également, comme position limite d'un espace à p dimensions passant par $p + 1$ points variables de la suite convergeant vers le point limite.

Les cas $r = 2$ et $r = 3$ seront traîté directement tandis que pour $r > 3$ l'on procédera le plus souvent par induction.

A la fin du mémoire les résultats les plus importants sont présentés sous forme analytique et l'on en donne quelques applications à la théorie des courbes en choisissant les exemples qui se présentent le plus naturellement à l'esprit.

Du reste, l'auteur a l'intention, en se basant sur cette théorie générale des suites monotones, de faire des études plus étendues qui formeront la continuation d'un travail antérieur sur les arcs plans. (Oversigt over d. kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1911, No. 5).

I.

Les suites monotones à une dimension.

1. Une suite infinie de points $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots$ tous situés dans un intervalle fini d'une ligne droite et dont deux aux moins sont distincts est dite monotone si la ligne $P_r P_s$ où $r < s$ et P_r distinct de P_s, a toujours la même direction sur la ligne droite donnée. On a, pour une telle suite, les théorèmes suivants.

La suite a un point limite P unique. Ce point ne peut se confondre avec un point P_r de la suite que si tous les points P_r, P_{r+1}, $P_{r+2} \ldots$ coïncident.

Si le point limite P est distinct de P_r, la ligne $P_r P$ aura une direction constante et cette direction est la même que celle de $P_r P_s$, $r < s$.

Si P_r et P_{r+s}, $s > 1$, coïncident, tous les points dont les indices sont situés entre r et $r+s$ se confondront avec les deux points indiqués.

2. Une suite infinie de demi-droites $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n, \ldots$ partant d'un même point O, que nous appellerons leur base commune, située dans un plan et contenant au moins deux demi-droites qui ne se trouvent pas sur la même ligne, est dite m o n o t o n e si le sens positif de rotation dans le plan peut être fixé de sorte que l'angle convexe de p_r à p_s soit toujours positif si $r < s$ et si p_r et p_s ne sont pas sur la même droite.

Le sens de rotation choisi s'appelle »le sens de rotation de la suite«.

Les angles convexes $(p_1\, p_2)$, $(p_1\, p_3)$, $(p_1\, p_4)$, ... pouvant être mesurés par une suite monotone de nombres qui sont tous plus petits que π ou égaux à π, on peut énoncer les théorèmes suivants.

Il existe pour la suite une demi-droite limite p unique qui ne peut se confondre avec une demi-droite p_r de la suite que si toutes les demi-droites suivantes: p_{r+1}, $p_{r+2}, \ldots$ se confondent avec celle-là.

L'angle positif convexe $(p_1\, p)$ contient toutes les demi-droites de la suite différentes de p_1 et p.

Si p_r coïncide avec p_{r+s}, $s > 1$, toutes les demi-droites $p_r, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots p_{r+s}$ se confondent.

Si la demi-droite p_r est opposée à p_1 les demi-droites p_r, $p_{r+1}, \ldots$ coïncident.

Si les demi-droites p_1 et p ne sont pas opposées, on peut trouver une ligne droite sur laquelle la suite donnée découpe une suite monotone de points.

Si la demi-droite p_1 est opposée à p, il sera toujours possible de trouver une ligne droite telle qu'en donnant à

r une valeur suffisamment grande elle soit coupée par la suite p_r, p_{r+1}, $p_{r+2}, \ldots$ en une suite monotone de points.

Une ligne droite quelconque passant par O et située dans le plan de la suite monotone $p_1, p_2, p_3, \ldots$ étant donnée, il est toujours possible de déterminer sur l une demi-droite l_1 telle que la suite $l_1, p_r, p_{r+1}, \ldots$ soit monotone, le nombre r étant pris suffisamment grand.

En effet, si la demi-droite p ne se trouve pas sur l il sera toujours possible de déterminer r de sorte que p_r, p_{r+1}, $p_{r+2}, \ldots$ soient tous situées de même côté de l que p. Cela posé, nous choisissons sur l la demi-droite l_1 partant de O pour laquelle l'angle $(l_1 p)$ est positif, et maintenant on voit bien que la suite $l_1, p_r, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots$ sera monotone.

Si la demi-droite p se trouve sur l, nous choisirons pour l_1 la demi-droite opposée à p et alors la suite $l_1, p_1, p_2, \ldots$ sera monotone.

3. Il sera utile dans ce qui suit de considérer encore d'autres suites monotones à une dimension; en voici une définition générale:

Une suite indéfinie de »demi-espaces« à $r-1$ dimensions ayant pour base commune un même espace à $r-2$ dimensions et situés dans un espace à r dimensions est dite monotone s'il existe un plan les coupant tous, les demi-droites d'intersection formant une suite monotone.

II.

Les suites monotones de points dans le plan.

4. Définition. Une suite indéfinie de points P_1, P_2, $P_3, \ldots$ $P_n, \ldots$ situés dans un plan sans se trouver en ligne droite est dite monotone si trois points quelconques de la suite P_r, P_s, P_t, $r < s < t$, déterminent toujours la même orientation dans le plan, les points étant pris dans l'ordre indiqué.

Ou en d'autre termes si les trois points ne sont pas en ligne droite le sens de rotation $P_r P_s P_t$ est toujours le même quels que soient les points choisis de la suite, à condition, bien entendu, que r $< s < t$.

En employant des coordonnées cartésiennes la définition posée se traduit de la manière suivante, en désignant par $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2) \ldots$ les coordonnées des points $P_1, P_2, \ldots$ il faut que le déterminant

$$(P_r P_s P_t) \equiv \begin{vmatrix} x_r & y_r & 1 \\ x_s & y_s & 1 \\ x_t & y_t & 1 \end{vmatrix}$$

où $r < s < t$, s'il n'est pas nul, ait toujours le même signe et, en outre, nous exigeons qu'il ne soit pas toujours égal à zéro.

5. Cela posé, nous supposerons maintenant que la suite est bornée, c'est à dire que tous ses points se trouvent dans une partie du plan dont la limite ne contient pas des points à distance infinie. Dans ce cas on peut démontrer que la suite a un point limite unique. ce qu'on exprime en disant que les points de la suite forment une suite fondamentale. Il en résulte que les deux expressions »suite monotone bornée« et »suite fondamentale monotone« ont la même signification, aussi emploierons-nous dans ce qui suit, tantôt l'une tantôt l'autre. Nous savons, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, que la suite a au moins un point limite; il s'agit donc de démontrer qu'il ne peut y en avoir plusieurs.

Supposons que la suite ait deux points limites P et P'. La suite étant monotone, le déterminant $(P_r P_s P_t)$ où $r < s < t$, aura toujours le même signe, s'il n'est pas nul. En changeant, s'il y a lieu, la direction positive d'un des axes coordonnés, on peut supposer que le déterminant est positif ou nul. Nous avons donc

$$(P_r P_s P_t) \geqq 0\,; \quad r < s < t.$$

ou en désignant par r, n, k des nombres entiers positifs quelconques

$$(P_r P_{r+n} P_{r+n+k}) \geqq 0.$$

Si maintenant l'on donne à r et n des valeurs fixes quelconques, tandis que k parcourt une suite de nombres croissants telle que

$$\lim_{k=\infty} P_{r+n+k} = P,$$

il résultera

$$\lim_{k=\infty} (P_r P_{r+n} P_{r+n+k}) \geqq 0$$

ou

$$(P_r P_{r+n} P) \geqq 0$$

pour toutes les valeurs positives entières de r et n. Ensuite nous faisons passer n par une suite de nombres croissants n_1, n_2, n_3, . . . telle que

$$\lim_{k=\infty} P_{r+n_k} = P'$$

ce qui donne

$$(P_r P' P) \geqq 0,$$

mais en prenant P et P' dans l'ordre inverse nous trouvons

$$(P_r P P') \geqq 0,$$

donc

$$(P_r P' P) = (P_r P P') = 0$$

pour toutes les valeurs de r; mais cela n'est pas possible si P et P' sont distincts, car il en résulterait qu'un point quelconque de la suite devrait se trouver sur la ligne passant par les deux points P, P', ce qui est contraire à nos suppositions. Nous avons donc démontré le théorème suivant.

Théorème 1. Toute suite infinie, bornée et monotone de points dans un plan a un point limite unique.

6. D'après ce qui précède, nous avons l'inégalité suivante où P désigne le point limite

$$(P_r P_s P) \geqq 0 \quad \text{pour } r < s.$$

Le point P peut coïncider avec P_1, mais il ne peut coïncider avec un point P_r distinct de P_1 que si tous les points

P_r, $P_{r+1}, \ldots$ se confondent. En effet, nous avons les inégalités.

$$(P_1 P_r P_s) \geqslant 0 \text{ pour } 1 < r < s$$

$$(P_1 P_s P) \geqslant 0$$

et si $P = P_r$ il en résulte

$$(P_1 P_s P) = 0 \text{ pour } s \geqslant r,$$

ce qui signifie que tous les points P_r, $P_{r+1}, \ldots$ se trouvent sur la droite $P_1 P$. Cela posé, comme il existe, dans la suite, au moins un point P_k $(1 < k < r)$ qui n'est pas sur la droite $P_1 P$, nous avons

$$(P_k P_{r+\alpha} P_{r+\alpha+\beta}) > 0 \text{ pour } \alpha \geqslant 0,\ \beta > 0\,;$$

donc les points P_r, P_{r+1}, $P_{r+2}, \ldots$ formeront une suite monotone sur la droite $P_1 P$, mais le point limite de cette suite étant $P = P_r$ il faut que $P_r = P_{r+1} = P_{r+2} = \ldots$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc si une suite monotone ne finit pas par se réduire à un seul point, son point limite ne peut se confondre avec un point de la suite différent de P_1.

7. On peut démontrer d'une manière analogue que si P_{r+s} $(s > 1)$ se confond avec P_r, distinct de P_1, tous les points P_r, $P_{r+1}, \ldots P_{r+s}$ coïncident. En effet, nous avons pour $0 < k \leqslant s$

$$(P_1 P_r P_{r+k}) \geqslant 0$$

$$(P_1 P_{r+k} P_{r+s}) \geqslant 0$$

et si $P_r = P_{r+s}$ il en résulte

$$(P_1 P_r P_{r+k}) = 0;$$

donc tous les points P_r, P_{r+1}, $P_{r+2}, \ldots P_{r+s}$ seront sur la droite $P_1 P_r$. Comme il y a d'autre part, dans la suite, au moins un point qui ne se trouve pas sur $P_1 P_r$, nous voyons que P_r, P_{r+1}, $P_{r+2}, \ldots P_{r+s}$ formeront sur cette droite une suite monotone (finie); mais, d'après notre supposition, $P_r = P_{r+s}$; donc les points indiqués se confondent.

Quand P_{r+s}, $(s \geqq 1)$ se confond avec P_r nous pouvons dire que la suite a un point double en P_r. D'après ce qui précède de tels points doubles ne peuvent se présenter que si la suite contient des répétitions consécutives d'un même point.

8. Deux points distincts P_n et P_{n+1} consécutifs de la suite étant donnés, de la condition

$$(P_r P_s P_t) \geqq 0, \ r < s < t$$

nous pouvons déduire que tous les points de la suite se trouveront d'un même côté de la droite $P_n P_{n+1}$, abstraction faite des points qui se trouvent sur cette droite même. D'une manière analogue l'inégalité $(P_r P_s P) \geqq 0$, $(r < s)$ démontre que la droite $P_1 P$ (P étant supposé différent de P_1) laisse d'un même côté tous les points de la suite à l'exception, naturellement, des points situés sur cette droite même.

Dans le mémoire antérieur cité plus haut[1] nous avons indiqué ce qu'on doit entendre par le domaine convexe appartenant à un ensemble de points fermé. En employant cette notion ici nous pouvons énoncer la proposition suivante. La frontière du domaine convexe appartenant à l'ensemble fermé des points $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots P$ est constituée par les segments $P_1 P_2$, $P_2 P_3, \ldots P_n P_{n+1}, \ldots$, le point P et, en outre, si P est distinct de P_1, par le segment PP_1.

9. Les demi-droites partant de P et contenant les points $P_1 P_2, \ldots P_n, \ldots$ respectivement formeront une suite monotone. Si P tombait en P_1 la demi-droite correspondant à P_1 serait indéterminée; dans ce cas nous considérerons la suite formée par les demi-droites par P_2, $P_3, \ldots$ seulement.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la définition, les demi-droites formant une suite ayant le sens de rotation

[1] Oversigt over d. kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1911, No. 5, pag. 437.

constant PP_rP_s, $(r < s)$. Cela posé, la demi-droite PP_n aura donc une position limite quand n croît indéfiniment. Cette demi-droite limite s'appelle la demi-tangente de la suite tandis que la droite qui la porte sera la tangente de la suite.

10. Traçons à partir de P_r les demi-droites suivantes:

1) les demi-droites opposées à P_rP_1, $P_rP_2, \dots P_rP_{r-1}$

2) les demi-droites P_rP_{r+1}, $P_rP_{r+2}, \dots$

Si P_r est un point double de la suite donnée nous omettrons, dans la construction précédente, les points tombant dans P_r.

La suite formée par toutes ces demi-droites s'appelle la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport au point P_r; nous allons démontrer que cette suite sera monotone.

En effet, nous avons les inégalités suivantes:

$$(P_\alpha P_r P_\beta) \leqslant 0 \quad \text{pour } \alpha < \beta < r$$

$$(P_\alpha P_r P_\beta) \geqslant 0 \quad \text{pour } \alpha < r < \beta$$

$$(P_\alpha P_r P_\beta) \leqslant 0 \quad \text{pour } r < \alpha < \beta$$

qui expriment justement que deux quelconques des demi-droites de la suite, prises dans l'ordre indiqué par la suite même, déterminent toujours le même sens de rotation.

Nous allons faire diverses applications de cette proposition.

11. En premier lieu, supposons que les trois points P_r, P_{r+s}, P_{r+s+t}, où $s > 0$, $t > 0$, $s + t > 2$, sont distincts et se trouvent en ligne droite. En considérant la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport à P_{r+s}, nous voyons que tous les points P_r, P_{r+1}, $P_{r+2}, \dots$ P_{r+s+t} se trouveront sur cette droite. Comme d'autre part la suite de points donnée est monotone, les points seront ordonnés sur la droite dans l'ordre indiqué, des coïncidences de points à indices consécutifs étant toutefois possibles. En second lieu, nous allons chercher les conditions nécessaires pour que le point limite P puisse être en ligne droite avec P_r et P_{r+s}, $s > 0$, les trois points P, P_r, P_{r+s} étant supposés distincts.

Deux cas peuvent se présenter:

1) Le point P_1 est situé sur la droite PP_rP_{r+s}.

Il résulte de la remarque précédente que tous les points P, P_1, P_2 ..., P_{r+s} seront sur la même droite, et en considérant la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport à un point P_k qui n'est pas situé sur cette droite, nous voyons que les points se succéderont dans l'ordre indiqué, des coïncidences étant toutefois possibles.

2) Le point P_1 ne se trouve pas sur la droite PP_rP_{r+s}.

Les déterminants $(P_1 P_r P_{r+s})$ et $(P_1 P_{r+s} P)$ étant du même signe, les segments P_rP_{r+s} et $P_{r+s}P$ auront la même direction, donc le point limite P se trouvera sur le prolongement de P_rP_{r+s} du côté de P_{r+s}. Cela posé, la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport au point P_{r+s} contiendra deux demi-droites distinctes p_1 et p_r opposées à $P_{s+r}P_1$ et $P_{s+r}P_r$ respectivement et la demi-droite limite de cette suite monotone coïncidera avec p_r. Il en résulte que toutes les demi-droites qui viennent après la demi-droite p_r se confondent avec elle. Donc, dans la suite donnée tous les points, à partir de P_r au moins, se trouveront sur une même ligne droite en formant sur elle une suite monotone.

Nous résumerons les résultats trouvés dans le

Théorème 2. *Toute suite fondamentale, monotone et plane qui ne finit pas par se réduire à un seul point possède, à son point limite, une tangente déterminée et une demi-tangente déterminée située sur elle.*

Si la suite a plus de deux points distincts en commun avec une droite, tous les points de la suite situés sur cette droite seront des points consécutifs de la suite. Ces points, pris dans l'ordre indiqué par la suite donnée, formeront sur la droite une suite monotone.

Si une droite passant par deux points distincts de la suite P_r, P_{r+s}, $s > 0$, contient le point limite P, ou bien la suite finira par être rectiligne, tous ses points, à partir de P_r au moins, étant situés sur la droite passant par P, ou bien la suite est rectiligne au commencement, un ensemble fini $P_1, P_2, \ldots P_n$, $n \geqslant r + s$, des premiers points de la suite se trouvant sur la droite passant par P.

12. Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante:

Théorème 3. Une suite fondamentale monotone et plane $P_1, P_2, P_3, \ldots$ étant donnée, soit O un point quelconque du plan de la suite et traçons les demi-droites OP_1, OP_2, $OP_3, \ldots$ Si le point O tombe en le point P_r de la suite, ce point est omis dans la construction des demi-droites. Cela posé, la suite de demi-droites OP_1, OP_2, $OP_3, \ldots$ finira par être monotone.

Nous pouvons supposer la suite sans points doubles, car de tels points n'auraient aucune influence sur les sens de rotation dans la suite de demi-droites indiquée.

Le théorème est évident si la suite finit par être rectiligne et il forme une conséquence immédiate des résultats obtenus plus haut (§§ 9 et 10) si le point O se trouve en un point de la suite ou s'il coïncide avec le point limite. Il ne restera donc à considérer que le cas général où la suite ne finit pas par être rectiligne et où le point O est distinct de tout point de la suite et du point limite.

Il suffira de considérer les cas où l'ensemble de points formé par la suite donnée et son point limite n'a jamais plus de deux points en ligne droite. En effet, d'après le théorème 2, si la suite ne satisfait pas à cette condition nous pouvons choisir, parmi ses points, une suite P_α, P_β, $P_\gamma, \dots$ qui y satisfait en ayant cette propriété que si p. ex. $\beta > \alpha + 1$ les points P_α, $P_{\alpha+1}, \dots P_\beta$ formeront, sur le segment $P_\alpha P_\beta$, une suite monotone, de même pour les autres segments $P_\beta P_\gamma$ etc. Cela étant, si le théorème proposé est vrai pour la suite OP_α, OP_β, $OP_\gamma, \dots$ c'est-à-dire si cette suite finit par être monotone, la suite OP_1, OP_2, $OP_3, \dots$ aura évidemment la même propriété.

Nous avons vu plus haut (no. 9) que la suite de demi-droites PP_1, $PP_2 \dots$, est monotone; il en résulte (no. 2) que nous pouvons déterminer, sur la droite $l \equiv OP$, une demi-droite l_1 partant de P telle qu'en choisissant pour r une valeur suffisamment grande la suite des demi-droites l_1, PP_r, $PP_{r+1}, \dots$ soit monotone; de plus toutes ces demi-droites peuvent être supposées distinctes entre elles, ce qui résulte des suppositions faites sur la suite donnée.

Le nombre r étant ainsi fixé, nous allons choisir un autre nombre entier s, $s > r$, de façon que toutes les demi-droites $P_r P_s$, $P_r P_{s+1}$, $P_r P_{s+2}, \dots$ aillent couper la droite l, ce qui est toujours possible puisque les demi-droites $P_r P_{r+1}$, $P_r P_{r+2}, \dots$ forment une suite monotone ayant pour limite la demi-droite $P_r P$. Du reste on peut remarquer que la droite l est coupée par les demi-droites $P_r P_s$, $P_r P_{s+1}$, $P_r P_{s+2}, \dots$ en une suite monotone de points ayant pour limite le point P.

Ces préliminaires bien compris, nous allons aborder la démonstration du théorème posé.

Les demi-droites l_1 et PP_s seront situées de côtés opposés par rapport à la droite PP_r, si $s > r$, r étant choisi comme nous l'avons indiqué ; il en sera évidemment de même des demi-droites l_1 et P_rP_s ; donc celles-là ne peuvent se couper. D'autre part, nous avons choisi le nombre s de sorte que la demi-droite P_rP_s coupe la droite l; donc le point d'intersection L se trouvera sur la demi-droite l_2 opposée à l_1. Le point L se trouvera sur le prolongement du segment P_rP_s au-delà de P_s, les demi-droites l_2 et PP_r étant situées de côtés opposés par rapport à PP_s.

Ensuite nous pouvons démontrer que le prolongement du segment P_sP_{s+1} au-delà de P_{s+1} vient couper la demi-droite l_2 en un point L_1 situé entre L et P.

En effet, les points L et P_r sont situés de côtés opposés par rapport à la droite P_sP_{s+1} tandis que P_r et P se trouvent du même côté de cette droite ; donc L et P se trouveront de côtés opposés et le segment LP est coupé par la droite P_sP_{s+1} en un point L_1. On voit immédiatement que L_1 se trouve sur le prolongement de P_sP_{s+1} au-delà de P_{s+1} car les deux demi-droites PP_s et l_2 sont situés de côtés opposés par rapport à PP_{s+1}, la suite de demi-droites l_1, PP_r, $PP_{r+1}, \ldots PP_s$, $PP_{s+1}, \ldots$ étant monotone. En continuant de cette façon l'on peut démontrer que le prolongement du segment $P_{s+1}P_{s+2}$ au-delà de P_{s+2} coupe la demi-droite l_2 en un point L_2 situé entre L_1 et P_1 et d'une manière générale, que le prolongement de $P_{s+k}P_{s+k+1}$, $k > 0$, au-delà de P_{s+k+1} vient couper l_2 en un point L_{k+1} situé entre L_k et P.

La suite monotone L, L_1, $L_2, \ldots,$ formée ainsi, aura son point limite au point P. En effet, soit Q_k le point d'intersection de la droite P_rP_{s+k}, $k > 0$, avec l_2, nous voyons que le point L_{k+1} défini plus haut se trouve entre Q_k et P, mais le point Q_k convergera vers P pour k croissant indéfiniment, donc il en sera de même du point L_{k+1}.

La démonstration va maintenant s'achever bien facilement. Il y aura deux cas à considérer :

1) Le point O est situé sur la demi-droite l_1.

Dans ce cas les points O et P sont situés du même côté par rapport aux droites P_rP_s, P_sP_{s+1}, $P_{s+1}P_{s+2}, \ldots$ parce que celles-ci coupent la demi-droite l_2 et non l_1, il en résulte que les orientations (OP_rP_s), $OP_sP_{s+1})$, $(OP_{s+1}P_{s+2}), \ldots$ seront identiques à (PP_rP_s), (PP_sP_{s+1}), $(PP_{s+1}P_{s+2})$, $\ldots$ respectivement, mais ces dernières coïncident, la suite des demi-droites PP_r, PP_s, $PP_{s+1}, \ldots$ étant monotone, donc les demi-droites OP_r, OP_s, $OP_{s+1}, \ldots$ formeront aussi une suite monotone, ce qu'il fallait demontrer.

2) Le point O est situé sur la demi-droite l_2.

Soit i un nombre entier tel que les points L_i, L_{i+1}, $L_{i+2}, \ldots$ se trouvent entre O et P; qu'un tel nombre existe, c'est ce qui résulte du fait, démontré plus haut, que la suite monotone L_1, L_2, $L_3, \ldots$ a son point limite au point P. Les sens de rotation $(OP_{s+i-1}P_{s+i})$, $(OP_{s+i}P_{s+i+1}), \ldots$ seront alors opposés à $(PP_{s+i-1}P_{s+i})$, $(PP_{s+i}P_{s+i+1}), \ldots$ respectivement et comme ces derniers coïncident il en sera de même des premiers, donc la suite de demi-droites OP_{s+i-1}, OP_{s+i}, $OP_{s+i+1}, \ldots$ est monotone. Le théorème 3 est ainsi complétement démontré.

13. Nous avons vu, dans ce qui précède, que le sens de rotation (OP_rP_s), $r < s$, sera constant si le nombre r est supérieur à une certaine limite. Il en résulte qu'en désignant par P_sP_r la demi-droite ayant son origine au point P_s et passant par P_r, P_sP_r aura une position limite unique, s et r croissant indéfiniment de manière que s reste supérieur à r. Qu'il existe, pour P_sP_r, au moins une position limite, c'est ce qui résulte du théorème de Bolzano-Weierstrass. D'autre part il ne peut exister qu'une seule position limite. Supposons, en effet, qu'il y en eût deux; dans ce cas il serait possible de trouver un point O tel que les sens de rotation autour de O, déterminés par les deux droites limites seraient dissemblables, ce qui est en contradiction avec la propositon que nous venons de mentionner. La position limite de la demi-droite P_sP_r coïncide avec celle de la demi-droite PP_r, cela résulte du fait que les deux orientations (OP_rP_s), $s > r$, (OP_rP) finiront par être identiques. Cette demi-droite limite est donc la demi-tangente de la suite fondamentale.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante:

Théorème 4. La demi-tangente d'une suite fondamentale, monotone et plane P_1, P_2, $P_3, \ldots$ sans points doubles, coïncide avec la position limite de la demi-droite P_sP_r, s et r croissant indéfiniment, s restant supérieur à r.

14. Nous indiquerons encore la condition suivante pour qu'une suite fondamentale finisse par être monotone ; nous entendons par là qu'il existe un nombre entier s tel que la suite soit monotone à partir du point P_s.

Théorème 5. Une suite fondamentale plane P_1, P_2, $P_3, \ldots$ n'ayant pas tous ses points en ligne droite finira par être monotone si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. trois points consécutifs quelconques de la suite P_r, P_{r+1}, P_{r+2} déterminent toujours, s'ils ne sont pas en ligne droite, la même orientation dans le plan;
2. la demi-droite $P_{r+1}P_r$ a une position limite déterminée pour r croissant indéfiniment.

La demi-droite $P_{r+1}P_r$ ayant une position limite déterminée, il sera possible de trouver un nombre entier s tel que l'angle convexe de deux quelconques des demi-droites $P_{r+1}P_r$, $P_{r+2}P_{r+1}, \ldots$, $r > s$, soit moindre, en valeur absolue, qu'un angle aigu ε choisi arbitrairement. La suite ayant en outre cette propriété que les orientations $(P_rP_{r+1}P_{r+2})$, $(P_{r+1}P_{r+2}P_{r+3}), \ldots$ sont identiques, on en déduit sans difficulté que la ligne brisée $P_r P_{r+1} P_{r+2} \ldots P_{r+i}$, $r > s$, $i > 1$ sera convexe ou rectiligne, d'où il résulte immédiatement que la suite P_r, $P_{r+1}, \ldots$ sera monotone pour $r > s$.

15. Nous pouvons démontrer la proposition analogue suivante, plus générale :

Théorème 5 bis. *Une suite infinie de points P_1, P_2, $P_3 \ldots$, situés dans un même plan, finira par être monotone si elle ne finit pas par être rectiligne, et si le demi-plan ayant la droite $P_r P_{r+1}$ comme limite et contenant le point P_{r+2} a une position limite déterminée pour r croissant indéfiniment.*

En premier lieu, nous voyons que la droite $P_{r+1} P_r$ convergera, pour r croissant à l'infini, vers une position limite déterminée et qu'il en sera de même de la demi-droite $P_{r+1} P_r$. En effet, dans le cas contraire, puisque la suite ne finit pas par être rectiligne, il serait possible de trouver deux suites infinies de nombres entiers $s_1, s_2, \ldots$ et $t_1, t_2, \ldots$ telles qu'en désignant par $P_s P_{s+1} (P_{s+2})$ le demi-plan ayant pour limite la droite $P_s P_{s+1}$ et contenant le point P_{s+2}, les demi-plans $P_{s_i} P_{s_i+1} (P_{s_i+2})$ et $P_{t_i} P_{t_i+1} (P_{t_i+2})$ eussent des positions limites distinctes, ce qui serait contraire à nos suppositions.

Remarquons en second lieu que, d'après nos suppositions pour le demi-plan $P_r P_{r+1} (P_{r+2})$, l'orientation $(P_r P_{r+1} P_{r+2})$ sera constante si r est supérieur à un certain nombre.

Déterminons enfin le nombre r de sorte que l'angle entre deux quelconques des demi-droites $P_{r+1} P_r$, $P_{r+2} P_{r+1}, \ldots$ soit moindre, en valeur absolue, qu'un angle aigu ε donné. Ceci sera possible en donnant à r une valeur suffisamment grande, les demi-droites indiquées ayant une position limite déterminée.

Le nombre r étant choisi de sorte que ces deux conditions soient satisfaites, nous voyons que la ligne brisée $P_r P_{r+1} \ldots P_{r+i}$, i désignant un nombre entier positif arbitraire, sera convexe ; donc la suite donnée sera monotone à partir du rang r, ce qu'il fallait démontrer.

III.
Les suites monotones de demi-droites dans l'espace à trois dimensions.

16. Une suite indéfinie de demi-droites p_1, p_2, $p_3 \ldots p_n, \ldots$ partant d'un même point O, et situées dans l'espace à trois dimensions sans être dans le même plan, est dite monotone si trois demi-droites quelconques de la suite p_r, p_s, p_t, ordonnées de sorte que $r < s < t$, déterminent toujours la même orientation, supposé que les trois demi-droites ne sont pas dans le même plan.

Prenons un système de coordonnées rectangulaires (xyz) ayant son origine au point O. En posant

$$\cos(xp_i) = \alpha_i, \ \cos(yp_i) = \beta_i, \ \cos(zp_i) = \gamma_i$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots$$

il faut que le déterminant

$$(p_r p_s p_t) = \begin{vmatrix} \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \\ \alpha_t & \beta_t & \gamma_t \end{vmatrix} \ : r < s < t$$

ait toujours le même signe quand il n'est pas nul. Une telle suite a certainement au moins une demi-droite limite et l'on peut démontrer qu'il n'y en aura qu'une seule. Supposons en effet que la suite ait deux demi-droites limites distinctes p et p'. Par les mêmes considérations qui ont servi pour la démonstration du théorème 1 (nº 5) nous trouvons $(p_r p' p) = (p_r p p')$;
qui exprime que les demi-droites p et p', supposées distinctes,

seraient opposées. Mais cela n'est pas possible car la suite étant monotone il en résulterait,

$$(p_r p_s p) = (p_r p_s p') = -(p_r p_s p)$$

et nous aurons donc $\quad (p_r p_s p) = 0$

qui exprime que toutes les demi-droites de la suite se trouvent dans un même plan, ce qui est contraire à nos suppositions.

La suite aura donc une demi-droite limite p unique.

17. Il résulte de la définition posée qu'un plan $p_r p_{r+1}$ passant par deux demi-droites consécutives quelconques et distinctes de la suite aura toutes les autres demi-droites de la suite d'un même côté, abstraction faite de celles d'entre elles, s'il y en a, qui se trouvent dans le plan même; si les demi-droites p et p_1 sont distinctes, il en sera de même du plan pp_1. Cela posé, supposons maintenant qu'il existe au moins trois plans distincts passant par des demi-droites consécutives de la suite. Trois quelconques de ces plans formeront un trièdre convexe tel que toutes les demi-droites de la suite se trouveront ou bien à l'intérieur du trièdre ou bien sur l'une de ses faces; donc il sera possible de trouver un plan coupant toutes les demi-droites $p_1, p_2, \ldots p_n \ldots p$. Les points d'intersection $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots P$ formeront, dans le plan, une suite fondamentale monotone à point limite P. En effet, l'orientation $(p_r p_s p_t)$, $r < s < t$, étant constante, il en sera de même de l'orientation $(P_r P_s P_t)$ des points d'intersection correspondants.

Dans le cas où il n'existe pas trois plans distincts passant par des demi-droites consécutives de la suite, il y en aura certainement deux, et toutes les demi-droites se trouveront alors dans l'un ou l'autre de ces plans; mais, la suite étant monotone, il faut qu'à partir d'un certain rang toutes les demi-droites soient situées dans l'un des plans.

Par les considérations qui précèdent il sera possible de réduire l'étude des suites monotones demi-droites dans l'espace à celle des suites monotones de points dans un plan, ce qui nous permettra d'énoncer immédiatement la proposition suivante :

Théorème 6. Une suite monotone de demi-droites, dans l'espace à trois dimensions, partant d'une même origine et non situées dans un même plan, aura une demi-droite limite p unique.

Si la suite ne finit pas par se réduire à une seule demi-droite, considérons le demi-plan limité par la droite de p et contenant la demi-droite p_r; ce demi-plan convergera, pour r croissant indéfiniment, vers un demi-plan déterminé que nous appellerons le demi-plan tangent de la suite, le plan qui porte ce demi-plan s'appellant le plan tangent.

Si la suite ne finit pas par être plane, les demi-droites finiront par être toutes situées du même côté du plan tangent.

Le demi-plan tangent sera la position limite d'un demi-plan variable limité par la droite qui porte p_s et contenant la demi-droite p_r, supposée distincte de p_s, lorsque r et s croissent indéfiniment, s restant supérieur à r.

18. On voit encore facilement que les suites monotones de demi-droites dans l'espace auront des propriétés analogues à celles indiquées au n^{os}: 6, 7, 11 pour les suites planes. En particulier on peut remarquer que la demi-droite limite p peut se confondre avec p_1 ; mais, à moins que la suite ne finisse par se réduire à une demi-droite unique, elle ne peut se confondre avec une demi-droite de la suite distincte de

p_1. De plus la demi-droite p ne peut être opposée à p_1; en effet, le déterminant $(p_1 p_r p_s)$, $1 < r < s$, a le même signe que $(p_r p_s p)$, mais si la demi-droite p était opposée à p_1 ce déterminant serait égal à $-(p_r p_s p_1)$; nous aurions donc

$$(p_1 p_r p_s) = 0$$

qui exprime que la suite serait plane contrairement à nos suppositions; il est donc impossible que la demi-droite limite p puisse être opposée à p_1.

On démontre de la même manière que si la demi-droite limite p est opposée à une demi-droite p_n de la suite, distincte de p_1, il existe deux plans tels que le premier contienne $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, tandis que le second contiendra toutes les autres demi-droites de la suite et encore la demi-droite limite p.

19. En terminant ce chapitre nous allons encore démontrer la proposition suivante:

Théorème 7. Une suite monotone de demi-droites $p_1, p_2, \ldots$ dans l'espace étant donnée, les demi-droites ayant une origine commune O et la suite ne finissant pas par se réduire à une demi-droite unique, soit l une droite quelconque passant par O. Sur l nous pouvons déterminer une demi-droite l_1 partant de O telle que la suite $l_1, p_r, p_{r+1}, \ldots$ soit monotone, r étant supérieur à un certain nombre déterminé. Il est naturellement permis de supposer que la demi-droite p_r est distinct de l_1.

Soit Π un plan qui ne passe pas par le point O et qui coupe la droite l et la demi-droite limite p de la suite donnée. Cela posé, choisissons un nombre entier r tel que toutes les demi-droites $p_r, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots$ coupent le plan Π, ce qui sera évidemment possible, et soient $L, P, P_r, P_{r+1} \ldots$ les points d'intersection de $l, p, p_r, p_{r+1}, \ldots$ respectivement avec le plan Π. La suite de points P_r, P_{r+1}, $P_{r+2}, \ldots$ étant monotone et ayant P comme point limite, il résulte du théorème 3 (nº 12) qu'on peut trouver un nombre entier s tel que l'orientation (LP_tP_u) soit la même pour toutes les valeurs de t et u satisfaisant à l'inégalité $s \leqslant t < u$.

Maintenant deux cas peuvent se présenter. Si l'orientation (LP_tP_u) est la même que l'orientation $(P_sP_tP_u)$, la suite L, P_s, $P_{s+1}, \ldots$ sera monotone, et, en désignant par l_1 la demi-droite OL, il en sera de même de la suite de demi-droites $l_1 p_s p_{s+1} \ldots$

Si, au contraire, les orientations $(P_sP_tP_u)$ et (LP_tP_u) sont opposées, c'est la demi-droite opposée à OL qu'il faut désigner par l_1 ; en effet, dans l'hypothèse actuelle, l'orientation $(l_1 p_t p_u)$ sera la même que $(p_s p_t p_u)$, donc la suite $l_1 p_s p_{s+1} \ldots$ sera encore monotone.

IV.

Les suites monotones dans l'espace.

20. Une suite de points P_1, $P_2, \ldots$ situés dans un espace à trois dimensions sans être dans le même plan, est dite *monotone* si quatre points quelconques de la suite P_r, P_s, P_t, P_u, ordonnés de sorte que $r < s < t < u$, déterminent toujours la même orientation dans l'espace, supposé que les quatre points ne se trouvent pas dans le même plan.

En employant des coordonnées rectangulaires $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2) \ldots$ il faut que le déterminant

$$(P_rP_sP_tP_u) \equiv \begin{vmatrix} x_r & y_r & z_r & 1 \\ x_s & y_s & z_s & 1 \\ x_t & y_t & z_t & 1 \\ x_u & y_u & z_u & 1 \end{vmatrix}$$

ait toujours le même signe quand il n'est pas nul ; et, de plus, il faut que le déterminant ne soit pas toujours égal à zéro.

Dans ce qui suit nous supposerons que la suite est infinie mais bornée, c'est-à-dire que les points P_1, P_2, $P_3, \ldots$ en nombre infini sont compris dans des limites ne contenant que des points à distance finie.

Nous saurons alors que la suite aura au moins un point limite P, et qu'il n'y aura, d'autre part, qu'un seul point limite: c'est ce qu'on démontre en raisonnant comme pour la démonstration du théorème 1 (nº 5). Soit en effet P' un autre point limite distinct de P, nous trouverons:

$$(P_r P_s P P') = (P_r P_s P' P) = -(P_r P_s P P');$$

donc
$$(P_r P_s P P') = 0,$$

ce qui exprime qu'un plan passant par P, P' et par un point quelconque de la suite, non situé sur la droite PP', contient la suite entière; or ceci est contraire à nos suppositions.

Nous arrivons donc à la proposition suivante:

Théorème 8. *Une suite indéfinie, monotone et bornée de points dans l'espace a un point limite unique.*

En vertu de ce théorème nous dirons souvent »suite monotone fondamentale« au lieu de »suite monotone bornée«.

21. Nous avons vu que pour une suite monotone le déterminant $(P_r P_s P_t P_u)$ a toujours le même signe, les points P_r, P_s, P_t, P_u étant ordonnés de telle sorte que $r < s < t < u$; en échangeant, s'il y a lieu, la direction positive d'un des axes coordonnés, nous pouvons supposer le déterminant positif ou nul; donc

$$(P_r P_s P_t P_u) \geqq 0.$$

En faisant croître u à l'infini, r, s, t conservant des valeurs fixes, nous trouvons, en désignant par P le point limite,
$$(P_r P_s P_t P) \geqq 0;$$

r, s, t peuvent prendre des valeurs quelconques soumises seulement à la condition $r < s < t$.

22. Nous allons rechercher dans quelles conditions le point limite P peut coïncider avec un point P_r de la suite.

Nous avons d'une part, pour $r < s < t < u$,

$$(P_r P_s P_t P_u) \geqq 0\,;$$

et, d'autre part, on trouvera si P se confond avec P_r:

$$(P_s P_t P_u P) = (P_s P_t P_u P_r) = -(P_r P_s P_t P_u) \geqq 0\,;$$

donc
$$(P_r P_s P_t P_u) = 0\,,$$

ce qui exprime que tous les points P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, ... seront dans le même plan. Nous avons supposé plus haut que la suite ne se trouve pas toute entière dans un plan; donc il existe un point P_q, $q < r$, en dehors du plan contenant les points indiqués. Cela posé, l'orientation $(P_q P_r P_s P_t)$ étant constante, les points P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, ... formeront une suite monotone, plane, à point limite P; en particulier cette suite peut se réduire à un seul point.

Nous pouvons aller plus loin et rechercher comment les points $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ doivent être situés dans le cas général. Soient P_α et P_β, $\alpha < \beta < r$, deux de ces points et P_p et P_q, $r \leqq p < q$ deux points de la suite plane P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, ... En remarquant que les deux points P_p et P_q sont sur la frontière du domaine convexe appartenant à l'ensemble des points P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, ... (voir nº 8) on voit sans difficulté que, si la droite $P_\alpha P_\beta$ ne venait pas couper le plan des points P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, ... au point P_r, l'orientation $(P_\alpha P_\beta P_p P_q)$ ne pourrait être constante pour toutes valeurs de p et q satisfaisant à l'inégalité $r \leqq p < q$. Il en résulte que les points $P_1, P_2, \ldots, P_r$ formeront une suite monotone rectiligne.

Théorème 9. *Si le point limite P d'une suite monotone de points dans l'espace tombe dans un point P_r de la suite, ou bien tous les points de la suite, suivant P_r, se confondent avec ce point, ou bien la suite est composée d'une suite finie, monotone et rectiligne $P_1, P_2, \ldots, P_r$ suivie d'une suite monotone plane à point limite P_r.*

23. Par des considérations analogues nous étudierons dans quelles conditions P_{r+k}, $k > 1$, peut coïncider avec P_r.

Supposons, en premier lieu, $k = 2$. Nous pouvons démontrer que si P_{r+2} se confond avec P_r, le point P_{r+1} tombera aussi en P_r. En effet, si le point P_{r+1} était distinct de P_r, soit Q, R deux points de la suite tels que les quatre points $P_r = P_{r+2}$, P_{r+1}, Q, R ne se trouvent pas dans un même plan; les orientations $(P_r P_{r+1} Q R)$ et $(P_{r+1} P_{r+2} Q R)$ seraient alors de signe contraire, ce qui est impossible, la suite étant monotone; donc P_{r+1} doit se confondre avec P_r et P_{r+2}.

Considérons ensuite le cas $k > 2$. Les déterminants

$$(P_r P_s P_t P_u) \quad \text{et} \quad (P_s P_t P_u P_{r+k})$$

où
$$r < s < t < u \leqq r + k$$

ont le même signe; mais si $P_r = P_{r+k}$ nous aurons

$$(P_s P_t P_u P_{r+k}) = (P_s P_t P_u P_r) = -(P_r P_s P_t P_u)$$

d'où résulte
$$(P_r P_s P_t P_u) = 0,$$

ce qui exprime que les points $P_r, P_{r+1}, \ldots, P_{r+k}$ seront dans un même plan; on voit de plus qu'ils y formeront une suite monotone finie.

P désignant le point limite de la suite donnée, nous aurons $(P_s P_t P_u P) \geqq 0$, $s < t < u$; donc les demi-droites PP_1, PP_2, PP_3, ... formeront une suite monotone de demi-droites dans l'espace.

Nous avons supposé $P_r = P_{r+k}$; maintenant nous ferons encore l'hypothèse que les points P_r, P_{r+1}, P_{r+k-1}, P_{r+k} ne coïncident pas tous et, en outre, que P ne se confond pas avec P_{r+k}, ce cas ayant été considéré plus haut.

Cela posé, la suite de demi-droites indiquée aura $PP_r = PP_{r+k}$ comme élément double, les demi-droites intermédiaires PP_{r+1}, PP_{r+2}, ... PP_{r+k-1} étant distinctes de PP_r; il en résulte que toutes les demi-droites suivantes PP_{r+k+i}, $i > 0$, coïncideront avec PP_{r+k} et que les demi-droites précédentes PP_{r-i} $(0 < i < r)$ se confondront avec $PP_r = PP_{r+k}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème 10. Soit une suite monotone de points dans l'espace possédant un point double qui n'est pas formé par la coïncidence de points consécutifs de la suite.

Une telle suite contient une suite monotone, finie et fermée $P_r, P_{r+1}, \ldots, P_{r+k}, P_{r+k} = P_r$, les autres points étant situés sur une ligne droite passant par P_r en formant sur elle une suite monotone.

24. Dans ce qui va suivre nous ne considérons pas les suites qui finissent par être planes ou rectilignes ou qui, à la fin, se réduisent à un seul point, car les propriétés principales de telles suites résultent immédiatement des études faites sur les suites planes ou rectilignes.

D'après le théorème 10, les suites considérées n'auront pas d'autres points doubles que ceux formés par la coïncidence de points consécutifs de la suite; mais les points de cette espèce n'ayant qu'une importance moindre, nous n'en ferons mention, en général, que dans l'énoncé des théorèmes.

Remarquons encore qu'en excluant de nos recherches les suites finissant par être planes, en vertu du théorème 10 nous n'aurons pas à considérer le cas où le point limite se confond avec un point de la suite.

25. Dans le cas des suites planes nous avons introduit la notion: suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport à un de ses points (n° 10); maintenant nous allons considérer, pour l'espace, la suite analogue composée des demi-droites opposées à $P_r P_1, P_r P_2, \ldots, P_r P_{r-1}$ suivies des demi-droites $P_r P_{r+1}, P_r P_{r+2}, \ldots$.

Cette suite de demi-droites sera monotone: c'est ce qu'on déduit facilement de la condition $(P_r P_s P_t P_u) \gtrless 0$, $r < s < t < u$, en employant le même raisonnement qui a servi au n° 10 pour démontrer la proposition analogue dans le cas du plan.

De plus, nous voyons que la suite aura $P_r P$ comme demi-droite limite.

Nous voyons de la même manière que la suite de demi-droites PP_1, PP_2, ... sera monotone.

26. Supposons maintenant que trois points distincts de la suite donnée P_r, P_s, P_t, $r < s < t$, soient situés sur une même ligne droite ; dans ce cas tous les points P_r, P_{r+1}, ..., P_t seront sur cette même droite et ils y formeront une suite monotone (finie) ; ceci résulte immédiatement en considérant la suite de demi-droites correspondante par rapport au point P_s.

27. Supposons qu'il existe un certain plan contenant plus de trois points de la suite, mais qu'il n'existe aucune droite ayant plus de deux points en commun avec la suite. Dans ce cas tous les points situés dans le plan indiqué seront consécutifs dans la suite et ils formeront une suite monotone dans le plan. Pour démontrer ce théorème nous n'aurons qu'à considérer la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport à un des points du plan.

28. De la définition générale donnée au nº 3, il s'ensuit qu'une suite de demi-plans passant tous par une même droite qui forme leur base commune, sera monotone si l'on peut trouver un plan tel que les demi-droites d'intersection avec les demi-plans de la suite donnée forment une suite monotone.

Cela posé, les demi-plans ayant pour base commune la droite $P_r P_s$, $r<s$, et passant par les points P_{s+1}, P_{s+2}, ... forment une suite monotone.

En effet, nous venons de voir, nº 25, que la suite des demi-droites $P_r P_s$, $P_r P_{s+1}$, $P_r P_{s+2}$, ... est monotone ; donc les points d'intersection P_s, Q_{s+1}, Q_{s+2}, ... de ces demi-droites avec un plan quelconque passant par P_s, choisi de sorte qu'il coupe bien ces demi-droites, forment une suite monotone de points. Il en résulte que la suite de demi-droites $P_s Q_{s+1}$, $P_s Q_{s+2}$, ... sera monotone. Nous voyons ainsi que les demi-plans considérés forment bien une suite monotone.

29. En appliquant les résultats trouvés et en particulier le théorème 6, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 11. *Une suite fondamentale monotone de points dans l'espace $P_1, P_2, P_3, \ldots$ qui ne finit pas par se réduire à un seul point aura en son point limite P une »demi-tangente« déterminée: position limite des demi-droites $PP_1, PP_2, PP_3, \ldots$.*

La droite qui porte la demi-tangente s'appelle la »tangente de la suite«.

Si la suite ne finit pas par être rectiligne (ou par se réduire à un seul point), elle aura un demi-plan osculateur determiné: position limite d'un demi-plan ayant pour base la tangente et passant par le point P_r de la suite, r croissant indéfiniment.

Le plan contenant le demi-plan osculateur s'appelle le plan osculateur.

Si la suite ne finit pas par être plane elle sera située, au moins à la fin, d'un seul côté par rapport au plan osculateur.

Nous pouvons dire aussi que le demi-plan osculateur est la position limite d'un demi-plan ayant pour base la droite PP_s et passant par P_r, $r < s$, quand r et s croissent à l'infini, r restant inférieur à s.

30. Soient ensuite P_r, P_s, P_t, $r < s < t$, trois points quelconques de la suite. Lorsque s et t croissent indéfiniment, s restant inférieur à t tandis que r reste fixe, le demi-plan ayant pour base la droite $P_r P_t$ en passant par P_s convergera vers un demi-plan ayant pour base la droite $P_r P$ et contenant la demi-tangente de la suite donnée. Cette proposition découle immédiatement du théorème 6, les demi-droites $P_r P_{r+i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, formant une suite monotone. En considérant deux points P_r distincts nous parviendrons au résultat suivant.

Théorème 12. La demi-tangente d'une suite monotone dans l'espace: $P_1, P_2, P_3, \ldots$ est la position limite de la demi-droite P_tP_s, $t > s$, quand s et t croissent à l'infini, t restant supérieur à s.

31. Si une suite monotone a cette propriété que quatre points consécutifs ne se trouvent jamais dans le même plan, ce qui entraîne, en particulier, que trois points consécutifs ne sont jamais en ligne droite, il n'existe aucun plan contenant plus de trois points de la suite et aucune droite qui en contienne plus de deux. Dans la même hypothèse, si l'on mène un plan passant par trois points consécutifs quelconques de la suite: P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, les points précédents $P_1, P_2, \ldots P_{r-1}$ seront tous du même côté du plan tandis que les points suivants P_{r+3}, P_{r+4}, ... se trouveront tous du côté opposé.

Les suites monotones ayant la propriété que nous venons d'indiquer seront appelées suites monotones normales.

La suite de demi-droites, correspondant à une suite monotone normale par rapport à un quelconque de ses points P_r, aura les propriétés suivantes:

Toutes les demi-droites de la suite seront distinctes et la demi-droite limite P_rP ne pourra pas coïncider avec une demi-droite de la suite, à l'exception seulement de la première d'entre elles.

Trois demi-droites de la suite ne peuvent jamais être dans le même plan et la demi-droite limite P_rP ne se trouve jamais dans le plan de deux demi-droites de la suite, à l'exception des deux premières d'entre elles.

Il résulte de ces propriétés, valables pour toute valeur de r, que P_1 et P_2 sont les seuls points de la suite qui puissent être en ligne droite avec le point limite P et que P_1, P_2, P_3 forment le seul système de trois points de la suite dont le plan puisse passer par P.

En considérant la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport au point limite P, nous voyons ensuite que la tangente de la suite peut passer par le point P_1 ou par les deux points P_1 et P_2, mais qu'elle ne peut passer ni par P_2 seul ni par aucun autre point de la suite. De plus il peut arriver qu'on puisse mener un plan par la tangente et les deux points $P_1 P_2$ ou bien par la tangente et les trois points P_1, P_2, P_3, mais ces cas sont les seuls où la tangente et deux points de la suite se trouvent dans le même plan. Enfin le plan osculateur ne peut contenir d'autres points de la suite que P_1 ou P_1 et P_2 ou bien les trois points P_1, P_2, P_3.

Donc si l'on retranche d'une suite monotone normale les trois premières points P_1, P_2, P_3 il reste une suite $P_4, P_5, \ldots$ ayant les propriétés suivantes:

1° Il n'existe aucun plan contenant plus de trois points de la suite (et aucune droite contenant plus de deux points).

2° Aucun plan passant par le point limite de la suite ne peut contenir plus de deux points appartenant à la suite et aucune droite passant par le point limite n'en peut contenir plus d'un seul point.

3° La tangente ne contient aucun point appartenant à la suite et elle ne coupe aucune droite passant par deux points de la suite.

4° Le plan osculateur ne contient aucun point de la suite.

Une suite ayant ces propriétés s'appelle une suite normale réduite.

32. Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental suivant:

Théorème 13. Soit une suite fondamentale monotone dans l'espace $P_1, P_2, P_3, \ldots$ et un point quelconque O; la suite de demi-droites $OP_1, OP_2, OP_3, \ldots$ finira par être monotone.

On voit immédiatement qu'il suffira de considérer des suites sans points doubles. De plus nous pouvons supposer que la suite ne finit pas par être plane ou rectiligne et que le point O ne coïncide pas avec un point de la suite ou avec le point limite. En effet dans ces cas, ou bien la proposition est évidente ou bien elle découle immédiatement des résultats trouvés plus haut.

Tout d'abord nous ne considérérons que des suites normales c'est-à-dire, d'après la définition donnée, des suites n'ayant pas plus de trois points dans un même plan ou, en particulier, ayant au plus deux points en ligne droite; en outre nous allons supposer que la suite est réduite.

Désignons par l la droite OP.

La suite de demi-droites $PP_1, PP_2, \ldots$ étant monotone, nous pouvons choisir un nombre entier r et, sur l, une demi-droite l_1 partant de P, de manière que la suite de demi-droites l_1, PP_r, $PP_{r+1}, \ldots$ ait les propriétés suivantes:

1° la suite est monotone;

2° la demi-droite PP_r est distincte de l_1;

3° il n'existe aucun demi-plan, ayant la droite l pour base, qui passe par plus d'une seule des demi-droites PP_r, $PP_{r+1}, \ldots$, ou, ce qui est la même chose, aucun de ces plans ne passe par plus d'un seul des points P_r, $P_{r+1}, \ldots$

Cela posé, les demi-droites l_1, PP_{r+2}, $PP_{r+3}, \ldots$ seront toutes d'un même côté par rapport au plan PP_rP_{r+1} et justement du côté des points P_{r+2}, $P_{r+3}, \ldots$

La demi-tangente t, de la suite donnée étant la limite de PP_n, n croissant indéfiniment, elle sera aussi de ce côté du plan.

Maintenant les demi-plans ayant pour base la droite $P_r P_{r+1}$ et passant par les points P_{r+2}, P_{r+3}, ... respectivement forment une suite monotone en convergeant vers le demi-plan de même base passant par P. Il sera donc possible de choisir un nombre entier u, $u > r+1$, tel que les demi-plans, à base $P_r P_{r+1}$ et contenant les points P_u, $P_{u+1}, \ldots$, coupent bien les demi-droites l_1 et t_1. Les points d'intersection des plans indiqués avec ces deux demi-droites formeront deux suites monotones à point limite P.

Enfin nous pouvons choisir un nombre entier $v \geqq u$ tel que toutes les demi-droites PP_v, PP_{v+1}, ... viennent couper le demi-plan qui a pour base la droite $P_r P_{r+1}$ et qui contient le point P_u. En effet, par ce qui précède nous sommes assurés que ce plan est coupé par la demi-tangente t_1; mais la demi-droite PP_v converge vers t_1 lorsque v croît à l'infini; donc en choisissant pour v une valeur suffisamment grande, les demi-droites PP_v, PP_{v+1}, ... couperont bien le plan indiqué.

Résumons les résultats de cette recherche préliminaire:

Nous pouvons choisir des nombres entiers r, u, v, $r+1 < u < v$ de telle manière que la suite des points P_r, P_{r+1}, P_u, P_v, P_{v+1}, P_{v+2}, ... satisfasse aux conditions suivantes:

1° Les demi-droites l_1 et t_1 sont coupées par les demi-plans ayant pour base la droite $P_r P_{r+1}$ et passant par les points P_u, P_v, P_{v+1}, ... respectivement, et les points d'intersection forment sur l_1 et t_1 respectivement, deux suites monotones à point limite P.

2° Les demi-droites l_1, PP_r, PP_{r+1}, PP_u, PP_v, $PP_{v+1}, \ldots$, qui forment une suite monotone, découpent sur le plan $P_r P_{r+1} P_u$ une suite monotone de points ayant son point limite T_1 sur la demi-tangente t_1.

Les points d'intersection de l_1, PP_v, PP_{v+1}, ... avec le plan $P_r P_{r+1} P_u$ seront désignés par L_1, P'_v, $P'_{v+1}, \ldots$.

Les points L_1, P_r, P'_v, P'_{v+1}, ... sont situés, dans le plan

$P_r P_{r+1} P_u$, d'un même côté de la droite $P_{r+1} P_u$; donc, dans l'espace, ils sont du même côté par rapport au plan $P_{r+1} P_u P_v$, tandis que le point P se trouvera du côté opposé. De là résulte que les segments PL_1, PP_v', PP_{v+1}', ... PT_1 couperont le plan $P_{r+1} P_u P_v$, et, comme ces segments sont situés sur des demi-droites formant une suite monotone, les points d'intersection formeront, dans le plan $P_{r+1} P_u P_v$, une suite monotone de points.

Ces points d'intersection, que nous désignerons par L_1', P_v, P_{v+1}'', ... T_1', seront donc situés, sur les demi-droites, l_1, PP_v, PP_{v+1}, ... t_1, entre le point P et les points L_1, P_v', P_{v+1}', ... T_1 respectivement.

Ensuite nous démontrerons d'une manière analogue que les segments PL_1', PP_{v+1}'', PP_{v+2}'', ... PT_1' sont coupés par le plan $P_u P_v P_{v+1}$ et, en continuant, nous parviendrons à ce résultat que la demi-droite l_1 est coupée par la suite de plans: $P_r P_{r+1} P_u$, $P_{r+1} P_u P_v$, $P_u P_v P_{v+1}$, $P_v P_{v+1} P_{v+2}$, ... en une suite de points, L_1, L_1', L_1'', L_1''', ... ayant pour limite le point P; cette suite sera monotone, car L_1' se trouve entre L_1 et P, L_1'' entre L_1' et P_1 etc.

En même temps nous voyons que cette suite de plans coupera la demi-droite t_1 en une suite monotone de points ayant pour limite le point P.

Maintenant nous pouvons démontrer la théorème 12 en raisonnant comme il suit. Il y aura deux cas à considérer:

1° Le point O ne se trouve pas sur la demi-droite l_1 mais sur la demi-droite opposée.

Dans ce cas les points O et P sont du même côté par rapport à chucun des plans

$$P_r P_{r+1} P_u, \quad P_{r+1} P_u P_v, \quad P_u P_v P_{v+1}, \quad P_v P_{v+1} P_{r+2}, \dots,$$

d'où il résulte que les orientations

$(P P_r P_{r+1} P_u)$, $(P P_{r+1} P_u P_v)$, $P P_u P_v P_{v+1})$, $(P P_v P_{v+1} P_{v+2})$, ...

seront identiques aux orientations
$(O P_r P_{r+1} P_u)$, $(O P_{r+1} P_u P_v)$, $(O P_u P_v P_{v+1})$, $O P_v P_{v+1} P_{v+2}) \ldots$
respectivement; mais les premières étant identiques entre elles il en sera de mêmes des autres.

De cette proposition nous pouvons déduire que l'orientation $(OP_\alpha P_\beta P_\gamma)$, $v < \alpha < \beta < \gamma$, sera toujours constante. En effet, la suite des points $P_r P_{r+1} P_u P_v P_\alpha P_\beta P_\gamma P_{\gamma+1} \ldots$ satisfait évidemment aux mêmes conditions que nous avons posées pour la suite $P_r P_{r+1} P_u P_v P_{v+1} \ldots$; le résultat établi pour cette dernière sera donc applicable; donc les orientations $(O P_r P_{r+1} P_u)$ et $(O P_\alpha P_\beta P_\gamma)$ seront identiques sous la seule condition: $v < \alpha < \beta < \gamma$. Il est donc démontré, dans l'hypothèse posée, que la suite de demi-droites $OP_1, OP_2, \ldots$ finira par être monotone.

2° Le point O se trouve sur la demi-droite l_1.

Choisissons un nombre k tel que le plan $P_r P_{r+1} P_{v+k}$ coupe la demi-droite l_1 en un point K situé entre O et P, ce qui est évidemment possible. Cela posé, les points d'intersection de la demi-droite l_1 avec les plans $P_x P_{x+1} P_{x+2}$, $x > v + k$, formant, d'après ce que nous avons démontré plus haut, sur l_1 une suite monotone ils seront tous situés entre les points K et P.

Par le même raisonnement qui nous a servi, il y a un moment, nous démontrerons encore que tout plan $P_x P_y P_z$, $v + k < x < y < z$, coupera aussi la demi-droite l_1 en un point situé entre K et P. De là résulte que les orientations $(P P_x P_y P_z)$, $(O P_x P_y P_z)$, $v + k < x < y < z$, seront opposées; mais la première étant constante, il en sera de même de la seconde, ce qui démontre que la suite de demi-droites $O P_1$, $O P_2, \ldots$ finira par être monotone.

Le théorème 13 est maintenant démontré dans l'hypothèse où la suite donnée est normale. Dans le cas général la démonstration peut être faite de la manière suivante:

Supposons que le théorème 12 ne soit pas vrai; dans ce cas, un nombre entier k arbitraire étant donné, on pourrait trouver des entiers $x, y, z, k < x < y < z$, tels que $(OP_xP_yP_z) > 0$ et d'autres entiers $t, u, v, k < t < u < v$ pour lesquels $(OP_tP_uP_v) < 0$. Cela posé, on en conclut facilement qu'il serait possible de former une suite de points: P_{x_1}, $P_{x_2} \ldots P_{x_n}, \ldots$, appartenant à la suite donnée, telle que quatre points consécutifs ne se trouvent jamais dans le même plan et que l'orientation $(OP_{x_{3n-2}}P_{x_{3n-1}}P_{x_{3n}})$, $n \geq 1$, soit positive pour n impair et négative pour n pair, mais cela serait contraire au résultat trouvé plus haut.

Le théorème 13 est ainsi complètement démontré.

33. De ce théorème fondamental nous pouvons tirer diverses conséquences.

En premier lieu nous en concluons immédiatement:

Théorème 14. En faisant la projection centrale d'une suite monotone fondamentale sur un plan on obtient une suite de points qui finit par être monotone.

Ensuite nous allons démontrer la proposition suivante:

Théorème 15. Le plan osculateur d'une suite monotone fondamentale $P_1P_2P_3\ldots$ est la position limite d'un plan passant par trois points P_r, P_s, P_t arbitraires de la suite qui ne se trouvent pas en ligne droite, lorsque r, s, t croissent indéfiniment.

Supposons, en effet, qu'il existe deux positions limites distinctes: α et β pour le plan $P_rP_sP_t$, correspondant à des manières différentes de passer à la limite. En premier lieu, passons à la limite de telle façon que le plan $P_rP_sP_t$ converge vers le plan α, et supposons que ce passage se fasse de manière que le sens de rotation $(P_rP_sP_t)$, $r < s < t$, converge vers un sens de rotation déterminé dans le plan α, ce qui est évidemment possible.

En second lieu, passons à la limite de telle façon que le plan $P_r P_s P_t$ ait pour limite le plan β et que les points $P_r P_s P_t$, $r < s < t$, donnent, à la limite, un sens de rotation déterminé dans ce plan.

Il serait alors possible de trouver un point O tel que ces deux sens de rotation déterminent avec le point O des orientations opposées dans l'espace. En d'autres termes, l'orientation $(O P_r P_s P_t)$, $r < s < t$, ne finirait pas par être constante contrairement au théorème 13.

L'hypothèse de plusieurs positions limites menant ainsi à une contradiction, il faut que le plan $P_r P_s P_t$, ait une position limite unique. Cette position limite étant aussi la position limite du plan $P P_s P_t$, elle se confond avec le plan osculateur de la suite donnée, d'après le théorème 11.

34. Menons par un point O, choisi arbitrairement, des demi-droites l_i parallèles aux demi-droites $P_{i+1} P_i$ respectivement, $i = 1, 2, 3, \ldots$, (si les points P_i, P_{i+1} coïncident, convenons d'omettre cette valeur de i). Nous allons démontrer que la suite de demi-droites ainsi construite finira par être monotone.

Si la suite donnée est plane, la proposition résulte immédiatement des propriétés des suites monotones planes ; il suffira donc de considérer le cas général.

Remarquons, en premier lieu, que l'orientation de trois demi-droites l_i, l_{i+1}, l_{i+2} consécutives, quelconques de la suite indiquée, sera constante. En effet, ces demi-droites étant parallèles aux demi-droites $P_{i+1} P_i$, $P_{i+2} P_{i+1}$, $P_{i+3} P_{i+2}$ respectivement, leur orientation sera indépendente de l'indice i si le signe du déterminant

$$\begin{vmatrix} x_i - x_{i+1} & y_i - y_{i+1} & z_i - z_{i+1} \\ x_{i+1} - x_{i+2} & y_{i+1} - y_{i+2} & z_{i+1} - z_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+3} & y_{i+2} - y_{i+3} & z_{i+2} - z_{i+3} \end{vmatrix}$$

est constant ; mais ce déterminant pouvant s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & z_{i+2} & 1 \\ x_{i+3} & y_{i+3} & z_{i+3} & 1 \end{vmatrix}$$

on voit qu'il en est bien ainsi.

En second lieu, le plan, passant par deux demi-droites consécutives, l_i et l_{i+1}, supposées distinctes, sera parallèle au plan passant par les trois points P_i, P_{i+1}, P_{i+2} de la suite donnée, ou, d'une manière plus précise, le demi-plan ayant pour base la droite portant l_{i+1} et contenant la demi-droite l_i sera parallèle au demi-plan ayant pour base $P_{i+2}P_{i+1}$ et passant par le point P_i; mais lorsque i croît à l'infini ce dernier demi-plan convergera vers le demi-plan osculateur de la suite donnée; donc le demi-plan de base l_{i+1} contenant la demi-droite l_i convergera, en même temps, vers une position limite déterminée.

Cela posé, il résulte du théorème 5, ou plutôt du théorème analogue pour une suite de demi-droites qui s'en déduit immédiatement, que la suite de demi-droites $\ldots l_i l_{i+1}, \ldots$ finira bien par être monotone. Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante:

Théorème 16. *Une suite monotone fondamentale $P_1P_2\ldots$ dans l'espace étant donnée, menons par un point fixe O des demi-droites l_i parallèles aux demi-droites $P_{i+1}P_i$ respectivement, $i = 1, 2, \ldots$, (supposé que les points P_i et P_{i+1} soient distincts; si P_i et P_{i+1} coïncident, nous convenons d'omettre cette valeur de i). Cela posé, la suite des demi-droites l_i finira par être monotone et sa demi-droite limite sera parallèle à la demi-tangente de la suite fondamentale donnée, tandis que son demi-*

plan tangent sera parallèle au demi-plan osculateur de cette suite.

35. On peut démontrer par des considérations analogues aux précédentes, ou bien en effectuant une transformation projective, qu'un plan arbitraire, qui ne passe pas par le point limite P, coupera les droites $P_1 P_2$, $P_2 P_3, \ldots$ en une suite de points qui finira par être monotone; de plus la tangente de cette suite plane sera dans le plan osculateur de la suite fondamentale donnée.

De cette proposition il s'ensuit que le plan osculateur est la position limite d'un plan passant par un point fixe Q, situé sur la tangente de la suite fondamentale et par deux points distincts P_r et P_s de cette suite, r et s croissant indéfiniment.

36. Une suite fondamentale, monotone de points dans l'espace $P_1 P_2 P_3, \ldots$, peut être construite de la manière suivante.

Soit une suite monotone de demi-droites dans l'espace $p_1 p_2 p_3 \ldots$, partant d'un point O, et une suite de nombres positifs: k_1, k_2, $k_3, \ldots$ tels, que la série $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$ soit convergente.

Cela posé, d'un point P_1, choisi arbitrairement, traçons un segment $P_1 P_2$, de longueur k_1, parallèle à la demi-droite p_1; du point P_2 traçons le segment $P_2 P_3$, de longueur k_2, parallèle à p_2 et ainsi de suite; nous allons démontrer que la suite de points ainsi construite sera fondamentale et monotone.

En premier lieu, l'orientation $(P_i P_{i+1} P_{i+2} P_{i+3})$ de quatre points consécutifs sera constante; c'est ce qui résulte immédiatement de la construction.

En second lieu, considérons l'orientation des quatre points P_i, P_{i+2}, P_{i+3}, P_{i+4}. Les segments $P_i P_{i+1}$ et $P_{i+1} P_{i+2}$ ayant le même direction que les demi-droites p_i et p_{i+1}, respectivement, le segment $P_i P_{i+2}$ sera parallèle à une demi-droites p'_i située dans le plan des deux demi-droites p_i et p_{i+1} et dans l'angle convexe $(p_i p_{i+1})$. De là résulte que les orientations $(p_{i+1} p_{i+2} p_{i+3})$ et $(p'_i p_{i+2} p_{i+3})$ seront identiques; donc il en sera de même des orientations $(P_{i+1} P_{i+2} P_{i+3} P_{i+4})$ et $(P_i P_{i+2} P_{i+3} P_{i+4})$. Nous avons ainsi démontré que, si l'on enlève, de la suite donnée, un point, P_{i+1}, l'orientation de quatre points consécutifs quelconque de cette nouvelle suite sera constante. Nous en concluons que, si l'on enlève un nombre fini quelconque de points, la suite ainsi formée aura encore cette même propriété: donc la suite donnée sera monotone. La suite sera aussi bornée, la série $k_1 + k_2 + \ldots$ étant convergente; donc elle sera fondamentale et monotone.

37. Nous pouvons démontrer, pour l'espace, la proposition suivante, analogue au théorème 5 ou plutôt au théorème plus général 5 bis.

Théorème 17. Une suite indéfinie de points dans l'espace, $P_1 P_2 P_3 \ldots$ ayant les propriétés suivantes, finira par être monotone:

1° la suite ne finit pas par être plane;

2° le demi-espace $P_r P_{r+1} P_{r+2} (P_{r+3})$, ayant pour base le plan $P_r P_{r+1} P_{r+2}$ et contenant le point P_{r+3}, convergera vers une position limite bien déterminée lorsque r croîtra à l'infini.

La démonstration se fait en utilisant les mêmes raisonnements que dans le cas du théorème 5 bis. En premier lieu on démontre que le demi-plan $P_r P_{r+1} (P_{r+2})$, ayant pour base la droite $P_r P_{r+1}$ et passant par le point P_{r+2}, convergera vers une position limite, et en second lieu qu'il en sera de même de la demi-droite $P_r P_{r+1}$. Cela étant, on déduit sans difficultés des résultats obtenus dans ce qui précède que la ligne brisée $P_r P_{r+1} \ldots P_{r+i}$ sera monotone pour toute valeur de i, r étant supérieur à un certain nombre, et de là il résulte immédiatement que la suite donnée finira par être monotone.

V.

Les suites monotones dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

38. Une suite indéfinie de points $P_1, P_2, \ldots$ située dans un espace R_r à r dimensions, mais que n'est pas contenue dans un espace à un nombre moindre de dimensions, est dite »monotone« si $r+1$ points quelconques de la suite, pris dans l'ordre indiqué par la suite même, déterminent toujours la même orientation dans R_r, supposé que les $r+1$ points ne soient pas contenus dans un espace à $r-1$ dimensions.

En employant des coordonnés rectangulaires $(x_i', x_i'', \ldots x_i^{(r)})$ il faut que le déterminant

$$(P_i P_j P_k \ldots P_s) = \begin{vmatrix} x_i' & x_i'' \ldots & x_i^{(r)} & 1 \\ x_j' & x_j'' \ldots & x_j^{(r)} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_s' & x_s'' \ldots & x_s^{(r)} & 1 \end{vmatrix}$$

ait toujours le même signe lorsqu'il n'est pas nul, les points étant ordonnés de sorte que $i < j < k < \ldots < s$. De plus il faut que le déterminant ne soit pas toujours nul.

Dans ce qui suit nous nous proposons de généraliser les théorèmes auxquels nous sommes parvenus plus haut dans le cas du plan est de l'espace R_3 en cherchant les théorèmes analogues pour l'espace à r dimensions.

39. En premier lieu nous avons la proposition qu'une suite monotone b o r n é e possède toujours un point limite déterminé u n i q u e; une telle suite est donc une suite fondamentale. La démonstration de ce théorème se fait de la même manière que pour les cas $r = 2$, $r = 3$.

40. Avant d'aller plus loin, il faut considérer les suites monotones de demi-droites; voici comment nous définissons ces suites.

Soit une suite indéfinie de demi-droites $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ayant pour base un point O et situées dans un espace R_r à r dimensions et supposons que la suite ne soit pas contenue dans un espace à un nombre de dimensions inférieur à r. Une telle suite est dite »monotone« si r quelconques des demi-droites, prises dans l'ordre indiqué par la suite même, présentent toujours la même orientation dans R_r, abstraction faite des cas exceptionnels où les r demi-droites sont contenues dans un espace à moins de r dimensions.

Soit un système de coordonnées rectangulaites $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_r)$, et soit

$$\cos(x_1 p_i) = \alpha_i', \ \cos(x_2 p_i) = \alpha_i'', \ldots \cos(x_r p_i) = \alpha_i^{(r)},$$

il faudra alors que le déterminant

$$(p_i p_j \ldots p_s) = \begin{vmatrix} \alpha_i' & \alpha_i'' & \ldots & \alpha_i^{(r)} \\ \alpha_j' & \alpha_j'' & \ldots & \alpha_j^{(r)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_s' & \alpha_s'' & \ldots & \alpha_s^{(r)} \end{vmatrix}$$

soit toujours du même signe (ou nul), les demi-droites étant ordonnées de sorte que $i < j < \ldots < s$. Cela posé, nous pouvons énoncer la proposition: une suite monotone de demi-droites dans R_r a une demi-droite limite unique: p. Nous avons démontré (nos 2, 16) cette proposition pour $r = 2$ et $r = 3$ et la démonstration se fait ici, dans le cas général, exactement de la même manière. Considérons ensuite, dans R_r un espace R_{r-1}, à $r—1$ dimensions, coupant la demi-droite p au point P distinct de O. Cela posé, pour une valeur de n suffisamment grande, toutes les demi-droites $p_n, p_{n+1}, \ldots$ couperont l'espace R_{r-1} et les points d'intersection $P_n, P_{n+1}, \ldots$ formeront, dans R_{r-1}, une suite monotone à point limite P. La première partie de cette proposition est évidente, la seconde partie résulte immédiatement du fait que le point O suivi de r points quelconques de la suite P_n, P_{n+1}, . . présentent une orientation constante dans R_r, ces derniers points étant pris dans l'ordre indiqué par la suite même.

41. Soit maintenant une suite fondamentale monotone dans R_r : $P_1\,P_2\,P_3\ldots.$ La suite des demi-droites ayant pour base le point limite P et passant par les points de la suite sera monotone; la demi-droite limite de cette suite est: la demi-tangente de la suite donnée.

L'existence du demi-plan osculateur se démontre ensuite de la manière suivante. Soit un R_{r-1} coupant la demi-tangente en un point Q distinct de P. Toutes les demi-droites PP_i, à partir d'une valeur n de l'indice i, couperont cet espace R_{r-1}, et les points d'intersection y formeront une suite monotone à point limite Q. La demi-tangente de cette suite détermine en commun avec la tangente de la suite donnée un demi-plan qui sera le demi-plan osculateur de cette suite.

En continuant de la même manière nous démontrerons successivement l'existence des demi-espaces osculateurs des ordres plus élevés 3, 4, . . r—1.

42. Dans ce qui suit nous considérerons en particulier des suites monotones de points dans R_r ayant au plus r points consécutifs en commun avec un R_{r-1}. Une telle suite sera dite normale. On définit une suite normale de demi-droites d'une manière analogue. Nous démontrerons qu'une suite normale aura au plus r points, consécutifs ou non, en commun avec un R_{r-1}. Comme corollaire, il en résulte qu'une suite normale ne peut avoir plus de r—i points en commun avec un R_{r-i-1}.

Pour la démonstration nous procéderons comme il suit.

En premier lieu, deux points consécutifs P_n et P_{n+1}

d'une suite normale ne peuvent pas coïncider, car il en résulterait qu'on pourrait faire passer un R_{r-1} par les $r+1$ points consécutifs de la suite: P_n, P_{n+1}, ... P_{n+r}, ce qui serait contraire à l'hypothèse. De la même manière, on voit, en second lieu, qu'un point P_n ne peut pas se confondre avec le point P_{n+k}, $1 < k \leqq r$; donc $r+1$ points consécutifs seront toujours distincts entre eux. Voyons ensuite si P_n et P_{n+k} peuvent coïncider lorsque $k > r$. Nous pouvons supposer que les points P_n, P_{n+1}, ... P_{n+k-1}, sont distincts.

Les orientations $(P_n P_{n+k-1} P_{n+k+1} P_{n+k+2} \ldots P_{n+k+r-1})$ et $(P_{n+k-1} P_{n+k} P_{n+k+1} P_{n+k+2} \ldots P_{n+k+r-1})$ étant identiques, si $P_n = P_{n+k}$ l'on aurait

$$(P_{n+k-1} P_{n+k} P_{n+k+1} \ldots P_{n+k+r-1}) = 0$$

ce qui est impossible puisque $r+1$ points de la suite ne peuvent pas être dans le même espace à $r-1$ dimensions.

Une suite normale n'aura donc jamais de points doubles. Ce point établi, nous allons démontrer que la suite ne peut avoir plus de deux points en commun avec une droite l. On voit immédiatement que trois points consécutifs de la suite ne peuvent pas être en ligne droite; en effet, dans ce cas il existerait un R_{r-1} passant par $r+1$ points consécutifs de la suite, ce qui est impossible, la suite étant normale. Supposons maintenant que la droite l passe par les points P_α, P_β, P_γ, $\alpha < \beta < \gamma$, qui ne sont pas tous consécutifs; alors les segments $P_\alpha P_\beta$ et $P_\beta P_\gamma$ auront la même direction. En effet, prenant $r-1$ points de la suite: P_{x_1}, P_{x_2}, .. $P_{x_{r-1}}$, $\gamma < x_1 < x_2 < \ldots x_{r-1}$; ou bien les orientations $(P_\alpha P_\beta P_{x_1} P_{x_2} \ldots P_{x_{r-1}})$ et $(P_\beta P_\gamma P_{x_1} P_{x_2} \ldots P_{x_{r-1}})$ sont toutes les deux différentes de zéro et de même signe, d'où résulte que les deux segments $P_\alpha P_\beta$ et $P_\beta P_\gamma$ ont bien la même direction, ou bien les deux orientations sont nulles, mais cela ne peut pas toujours avoir lieu. Cela posé, les points P_α, P_β, P_γ n'étant pas consécutifs et ne faisant pas partie d'un ensemble de points consécutifs situés sur la droite l, il sera toujours possible de trouver un point P_k en dehors de l dont l'indice k se trouve ou bien entre α et β ou bien entre β et γ. Supposons, pour fixer les idées, $\alpha < k < \beta$, l'autre cas pouvant être traité de la même manière. Les segments $P_\alpha P_\beta$ et $P_\beta P_\gamma$ ayant la même direction, les deux orientations dans le plan lP_k: $(P_\alpha P_k P_\beta)$ et $(P_k P_\beta P_\gamma)$ seront opposées; de là résulte que les orientations $(P_\alpha P_k P_\beta P_{x_1} P_{x_2} \ldots P_{x_{r-2}})$ et $(P_k P_\beta P_\gamma P_{x_1} P_{x_2} \ldots P_{x_{r-2}})$ seront ou bien opposées ou bien nulles toutes les deux; le dernier cas ne peut pas toujours avoir lieu et le premier est impossible, la suite étant monotone.

Nous arrivons ainsi à une contradiction, et la suite ne peut donc avoir plus de deux points en commun avec une ligne droite.

Démontrons encore que la suite ne peut avoir plus de 3 points en commun avec un plan. La méthode est toujours la même. Supposons qu'il existe 4 points de la suite donnée: $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma, P_\delta$, $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, se trouvant dans le même plan. On voit immédiatement qu'il faut supposer que P_α, P_β, P_γ, P_δ ne sont pas quatre points concécutifs. Remarquons en premier lieu que les orientations $(P_\alpha P_\beta P_\gamma)$ et $(P_\beta P_\gamma P_\delta)$ seront identiques (les orientations ne peuvent pas disparaître, trois des points $P_\alpha P_\beta P_\gamma P_\delta$ ne pouvant pas être en ligne droite); on démontre cette proposition en considérant, comme dans le cas précédent, les orientations dans R_r $(P_\alpha P_\beta P_\gamma P_{x_1} P_{x_2} \ldots P_{x_{r-2}})$ $(P_\beta P_\gamma P_\delta P_{x_1} P_{x_2} \ldots P_{x_{r-2}})$, $\delta < x_1 < x_2 < \ldots < x_{r-2}$. Prenons ensuite un point P_k de la suite donnée qui n'est pas dans le plan considéré et dont l'indice k se trouve entre α et δ; d'après des suppositions faites nous sommes assurés de pouvoir toujours trouver un tel point. Supposons $\alpha < k < \beta$, les autres cas se traitent de la même manière. Les orientations $(P_\alpha P_k P_\beta P_\gamma)$ et $(P_k P_\beta P_\gamma P_\delta)$ dans l'espace à trois dimensions $P_k P_\alpha P_\beta P_\gamma$ seront alors opposées; mais la suite donnée étant monotone, ces deux orientations doivent être identiques et nous sommes donc encore amenés à une contradiction. La suite donnée, supposée normale, ne peut donc avoir plus de trois points en commun avec un plan.

Maintenant l'on voit bien qu'on peut continuer ainsi, en considérant successivement des espaces d'un nombre de dimensions de plus en plus élevé. Nous parvenons ainsi à la proposition qu'une suite normale ne peut avoir plus de i points en commun avec un R_{i-1}.

43. Considérons maintenant le point limite P. Si le nombre r est impair le point P ne peut pas coïncider avec un point P_i de la suite. En effet, dans ce cas les orientations $(P P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_r})$ et $(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_r} P)$ seraient identiques, P_{i_1}, $P_{i_2}, \ldots P_{i_r}$ étant des points de la suite tels que $i < i_1 < i_2 < \ldots < i_r$; mais, r étant impair, il en résulterait $(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_r} P) = 0$, de sorte que la suite finirait par être contenue dans un espace à r—1 dimensions, ce qui est contraire à nos suppositions.

Si le nombre r est pair, le point P peut se confondre avec P_1 mais non avec P_2 ou avec l'un des points suivants de la suite. Lorsque, en effet, P tombe en P_2, les orientations $(P_1 P_2 P_{i_1} \ldots P_{i_{r-1}})$ et $(P_1 P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_{r-1}} P_2)$ deviennent identiques, $2 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{r-1}$, mais pour r pair il en résulte $(P_1 P_2 P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_{r-1}}) = 0$, ce qui est impossible.

Nous voyons ainsi qu'en retranchant d'une suite monotone donnée le premier point on peut être assuré que le point limite ne coïncide avec aucun point de la suite restante.

Il va sans dire que, pour les suites monotones de demi-droites, nous avons des propositions analogues.

44. Cette dernière remarque nous sera utile pour démontrer que dans une série monotone normale outre les deux premiers points P_1 et P_2 il n'existe aucun système de deux points, appartenant à la suite, qui puissent se trouver en ligne droite avec le point limite P. Nous allons considérer la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport au point P_r (nº 10). Cette suite est composée

1) des prolongements de $P_1 P_r$, $P_2 P_r, \ldots$ $P_{r-1} P_r$ au-delà de P_r;

2) des demi-droites $P_r P_{r+1}$, $P_r P_{r+2}, \ldots$

Pour faciliter le langage nous dirons souvent que la suite est formée en faisant la projection de la suite donnée du point P_r.

On voit immédiatement que cette suite sera monotone.

Cela posé, supposons qu'il se trouve dans la suite une paire de points $P_r P_s$, distincte de $P_1 P_2$, $s > r > 1$, telle que la droite $P_r P_s$ passe par le point limite P. Dans la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport à P_r on trouverait alors la demi-droite $P_r P_s$ coïncidant avec la demi-droite limite $P_r P$; mais $P_r P_s$ n'étant pas la première droite de la suite, nous serions en contradiction avec la remarque faite plus haut. On voit immédiatement que nous avons, pour les suites de demi-droites, la proposition suivante analogue à celle que nous venons de démontrer pour les suites de points. Le seul plan, passant par deux demi-droites d'une suite monotone normale qui puisse contenir la demi-droite limite de la suite, est celui qui est déterminé par les deux premières demi-droites de la suite.

Nous pouvons démontrer de la même manière que, dans une suite monotone normale de points, le seul système de trois points dont le plan puisse contenir le point limite est celui qui est formé par les trois premiers points. En même temps nous aurons la proposition analogue pour une suite monotone normale de demi-droites.

En continuant ainsi nous parviendrons à ce résultat qu'en retranchant d'une suite monotone normale de points un nombre fini des premiers points, nous obtiendrons une suite telle qu'un R_p, $p < r$, passant par le point limite de la suite ne puisse jamais contenir plus de p points de celle-ci.

Une suite ayant cette propriété s'appelle une suite normale réduite.

Pour les suites de demi-droites nous aurons une proposition analogue.

45. La suite de demi-droites que l'on forme en faisant la projection de la suite donnée de son point limite P est une suite normale. Réduisons cette suite de la manière que nous venons d'indiquer, puis faisons la réduction correspondante de la suite donnée; nous parviendrons ainsi au résultat suivant. En retranchant d'une suite de points monotone et normale un nombre fini des premiers points, on peut former une nouvelle suite ayant cette propriété qu'il n'existe aucun espace R_p, $p < r$, passant par la tangente et contenant plus de $p - 1$ points de la suite.

La proposition analogue pour les suites monotones normales de demi-droites s'énonce ainsi: En supprimant un nombre fini des premières demi-droites d'une suite monotone normale, on peut former une suite telle qu'aucun espace R_p, $p < r$, contenant le plan tangent ne puisse passer par plus de $p - 2$ demi-droites de la suite.

En continuant ainsi nous parviendrons enfin au résultat général que voici. En retranchant d'une suite monotone normale de points un nombre fini des premiers points on peut la réduire à une autre telle qu'un espace R_p, $p < r$, passant par l'espace osculateur de q dimensions ne puisse jamais contenir plus de $p - q$ points de la suite.

46. Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante.

Théorème 18. Une suite normale de points $P_1 P_2 \ldots$ étant donnée dans un espace R_r à r dimensions, la suite de demi-droites correspondant à la suite donnée par rapport à un point quelconque O: OP_1, $OP_2, \ldots$ finira par être monotone.

Si le point O tombe dans un des points de la suite ou dans le point limite P, la proposition est une conséquence immédiate de ce qui précède; il sera donc inutile de considérer ces cas. Pour la démonstration nous procèderons par induction. La proposition ayant été démontrée pour $r = 2, 3$ nous la supposerons vraie pour les espaces R_2, $R_3, \ldots R_{r-1}$ et nous démontrerons qu'elle sera vraie également pour l'espace R_r.

En faisant l'hypothèse indiquée nous démontrons en premier lieu la proposition suivante:

Théorème 19. Étant donnée, dans un espace R_r à r dimensions, une suite normale de demi-droites $q_1, q_2, \ldots$ à base P il sera possible de déterminer sur une droite quelconque l, passant par P, une demi-droite l_1 à base P, de sorte que la suite $l_1 q_n q_{n+1} \ldots$ soit normale en choisissant pour n une valeur suffisamment grande.

Considérons, pour démontrer cette proposition, un espace R_{r-1} coupant la droite l et la demi-droite limite q de la suite donnée en des points L et Q distincts de P. En donnant au nombre entier m une valeur suffisamment grande, toute les demi-droites q_m, $q_{m+1} \ldots$ couperont l'espace R_{r-1} et les points d'intersection Q_m, $Q_{m+1}, \ldots$ formeront, dans R_{r-1}, une suite monotone à point limite Q. De plus nous pouvons supposer qu'un espace R_{r-2} ne contient jamais plus de r—1 points de cette suite.

Maintenant le théorème 18 étant supposé vrai pour tout espace à r—1 dimensions, il sera possible de trouver un nombre entier n, $n > m$, tel que les demi-droites LQ_n, LQ_{n+1}, $LQ_{n+2}, \ldots$ forment une série monotone; l'orientation, dans R_{r-1}, $(LQ_{i_1} Q_{i_2} \ldots Q_{i_{r-1}})$ sera donc constante si

$n \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{r-1}$. De là résulte qu'il en sera de même de l'orientation, dans l'espace R_r, $(PLQ_{i_1}Q_{i_2} \ldots Q_{i_{r-1}})$. Cela posé, si cette orientation est identique à celle de la suite donnée PL sera la demi-droite cherchée l_1, et dans le cas contraire c'est le prolongement de LP au-delà de P qui nous donnera cette demi-droite.

L'existence de la demi-droite l_1 est ainsi démontrée. Il nous reste encore à faire voir qu'on pourra supposer que la suite monotone des demi-droites l_1, q_n, $q_{n+1}, \ldots$ n'a jamais plus de $r - 1$ demi-droites dans un même espace à $r - 1$ dimension ou, en d'autres termes, que cette suite est normale.

D'après ce qui précède et d'après nos hypothèses relativement à la suite donnée il suffira de démontrer que les demi-droites l_1, q_n, $q_{n+1}, \ldots q_{n+r-2}$ ne sont pas dans le même espace R_{r-1}. Supposons qu'il existe un espace R_{r-1} contenant toutes les demi-droites l_1, q_n, $q_{n+1} \ldots q_{n+r-2}$ pour la valeur choisie de n; nous pouvons alors démontrer qu'il se trouve, parmi les r groupes chacun de r demi-droites:

$$(l_1\, q_n q_{n+1} \ldots q_{n+r-2}),\ (l_1\, q_{n+1} q_{n+2} \ldots q_{n+r-1}),$$
$$(l_1\, q_{n+2} q_{n+3} \ldots q_{n+r}),\ \ldots\ (l_1\, q_{n+r-1} q_{n+r} \ldots q_{n+2r-3}),$$

au moins un qui ne soit pas contenu dans un espace R_{r-1}. S'il n'en était pas ainsi les r espaces à $r - 1$ dimensions, ainsi déterminés, passeraient tous par la demi-droite l_1. En premier lieu, ces espaces sont distincts entre eux ; en effet, ils sont déterminés, d'une manière univoque, par r groupes distincts de $r - 1$ demi-droites successives appartenant à la suite donnée.

Désignons ensuite ces espaces par R', R'', $\ldots R^{(r)}$, de sorte que

$$R' \equiv (q_n q_{n+1} \ldots q_{n+r-2})$$
$$R'' \equiv (q_{n+1} q_{n+2} \ldots q_{n+r-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R^{(r)} \equiv (q_{n+r-1} q_{n+r} \ldots q_{n+2r-3});$$

R' et R'' se couperont dans un espace à $r—2$ dimensions que nous désignerons par $(R'R'')$ et qui est déterminé d'une manière univoque par les demi-droites q_{n+1}, q_{n+2}, . . q_{n+r-2}. Nous pouvons donc écrire:

$$(R'R'') \equiv (q_{n+1}\, q_{n+2} \ldots q_{n+r-2})$$
$$(R''R''') \equiv (q_{n+2}\, q_{n+3} \ldots q_{n+r-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(R^{(r-1)}R^{(r)}) \equiv (q_{n+r-1}\, q_{n+r} \ldots q_{n+2r-4})$$

Deux espaces successifs de cette suite se couperont dans un espace de $r—3$ dimensions déterminé de la manière suivante:

$$(R'R''R''') \equiv (q_{n+2}\, q_{n+3} \ldots q_{n+r-2})$$
$$(R''R'''R^{IV}) \equiv (q_{n+3}\, q_{n+4} \ldots q_{n+r-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En continuant ainsi nous aurons en dernier lieu:

$$(R'R'' \ldots R^{(r-1)}) \equiv q_{n+r-2}$$
$$(R''R''' \ldots R^{(r)}) \equiv q_{n+r-1},$$

ce qui démontre qu'il n'existe aucune demi-droite qui soit commune à tous ces espaces: ceux-ci ne peuvent donc tous passer par la demi-droite l_1. Nous voyons maintenant que si le nombre n a été déterminé en sorte que la suite de demi-droites $l_1\, q_n q_{n+1} \ldots$ soit monotone, les demi-droites l_1, q_{n+r-1}, q_{n+r}, q_{n+r+1}, ... formeront certainement une suite monotone normale.

Le théorème 19 est ainsi démontré en supposant que le théorème 18 soit vrai pour tout espace à moins de r dimensions.

47. En faisant toujours cette hypothèse, nous allons maintenant démontrer que le théorème 18 sera aussi valable pour les espaces à r dimensions.

Nous supposerons qu'en retranchant un nombre fini des premiers points, nous ayons réduit la suite donnée de façon qu'un espace à $r—1$ dimensions contenant le point limite P de la suite ne contienne jamais plus de $r—1$ points de celle-ci et qu'un espace à $r—1$ dimensions passant par la tangente de la suite n'en contienne jamais plus de $r—2$ points.

La droite OP, que nous désignerons par l, est partagée par le point P en deux demi-droites l_1 et l_2, et nous pouvons supposer, d'après le théorème 19, en retranchant, s'il y a lieu, un nombre fini des premiers points de la suite, que l'une d'elles, par exemple l_1, forme en commun avec les demi-droites PP_1, $PP_2 \dots$ une suite monotone normale.

Cela posé, considérons l'espace à $r—1$ dimensions passant par les points $P, P_1, P_2, \dots P_{r-1}$; nous le désignerons par $(PP_1 \dots P_{r-1})$. Les points $P_r, P_{r+1}, \dots$ seront tous situés d'un même côté par rapport à cet espace et de ce même côté l'on trouvera donc aussi les demi-droites $PP_r, PP_{r+1}, \dots$ ainsi que la demi-tangente t_1 de la suite donnée.

En considérant la suite monotone de demi-droites: l_1, PP_1, $PP_2, \dots$ nous voyons que si r est impair la demi-droite l_1 sera du même côté de l'espace $(PP_1 \dots P_{r-1})$ que les demi-droites $PP_r, PP_{r+1}, \dots$ et t_1; mais si r est pair c'est la demi-droite l_2, opposée à l_1 qui se trouvera de ce côté. Il y aura donc deux cas à considérer selon que r est impair ou pair. Commençons par le cas de r impair qui peut se traiter par une méthode essentiellement analogue à celle employée pour $r = 3$.

Les demi-espaces à $r—1$ dimensions limités par l'espace à $r—2$ dimensions $P_1P_2 \dots P_{r-1}$, ou, comme nous dirons le plus souvent, ayant cet espace pour base commune, et passant par les points $P_r, P_{r+1}, \dots$ forment une suite à une dimension monotone.

En effet, en choisissant convenablement le système des coordonnées on peut supposer que les points $P_1, \dots P_{r-1}$ ont les coordonnées suivantes:

$$P_1\colon\ (0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots\ 0)$$
$$P_2\colon\ (0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots\ x_1^{(r)})$$
$$P_3\colon\ (0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots\ 0,\ x_2^{(r-1)},\ x_2^{(r)})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_{r-1}\colon\ (0,\ 0,\ x_{r-2}^{(3)},\ x_{r-2}^{(4)}\ \ldots\ x_{r-2}^{(r)})$$

Soient $(x_t', x_t'', \ldots x_t^{(r)})$ et $(x_u', x_u'', \ldots x_u^{(r)})$ les coordonnées des points P_t et P_u, $r \leqslant t < u$. Nous aurons alors:

$$(P_1 P_2 P_3 \ldots P_{r-1} P_t P_u) = (-1)^{\frac{(r-1)(r-2)}{2}} x_1^{(r)} x_2^{(r-1)} \ldots x_{r-2}^{(3)} \begin{vmatrix} x_t' & x_t'' \\ x_u' & x_u'' \end{vmatrix},$$

ce qui montre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_t' & x_t'' \\ x_u' & x_u'' \end{vmatrix}$$

aura un signe invariable, ou, en d'autres termes, qu'un plan passant par le point P, et orthogonal à l'espace $P_1P_2\ldots P_{r-1}$ coupera la suite de demi-espaces donnée en une suite monotone de demi-droites.

Cette suite monotone ayant pour limite un demi-espace passant par le point P, il sera possible de choisir un nombre u, $u > r-1$, de façon que les demi-espaces, appartenant à la suite indiquée, qui passent par les points P_u, $P_{u+1}\ldots$ coupent les demi-droites l_1 et t_1, passant toutes les deux par le point P. Les points d'intersection des demi-espaces avec l_1 et t_1 formeront alors deux suites monotones à point limite P.

Nous déterminons ensuite un nombre entier v, $v \geqslant u$, tel que les demi-droites PP_v, $PP_{v+1}, \ldots$ viennent couper le demi-espace ayant pour base l'espace $P_1P_2\ldots P_{r-1}$ et contenant le point P_u. Ceci sera toujours possible car, d'après ce qui précède, nous sommes dèja assurés que cet espace coupe la demi-tangente t_1; mais PP_v convergeant vers t_1, pour v croissant à l'infini, il sera donc possible de choisir v de la manière indiquée. Nous avons ainsi choisi les indices u et v de sorte que la suite de points: $P_1 P_2 \ldots P_{r-1} P_u P_v P_{v+1} P_{v+2} \ldots$ satisfasse aux conditions suivantes:

1°. Les demi-espaces à r—1 dimensions, ayant pour base commune l'espace à r—2 dimensions déterminé par les points P_1, $P_2, \ldots P_{r-1}$ et passant par les points P_u, P_v, $P_{v+1} \ldots$ respectivement, coupent les demi-droites l_1 et t_1, les points d'intersection formant des suites monotones à point limite P.

2°. Les demi-droites $l_1, PP_1, PP_2, \ldots PP_{r-1}, PP_u, PP_v, PP_{v+1}, \ldots$ forment une suite monotone coupant l'espace à r—1 dimensions déterminé par les points: $P_1, P_2 \ldots P_{r-1} P_u$ en une suite monotone de points: L_1, P_1, $P_2, \ldots P_{r-1}$, P_u, P'_v, $P'_{v+1}, \ldots$ dont le point limite T_1 est situé sur t_1.

Les points L_1, P_1, P'_v, $P'_{v+1} \ldots$ seront tous, dans l'espace à r—1 dimensions déterminé par les points P_1, $P_2, \ldots P_{r-1}$, P_u, d'un même côté par rapport à l'espace à r—2 dimensions déterminé par $P_2 P_3 \ldots P_{r-1} P_u$, r—1 étant un nombre pair. Dans l'espace R_r les points indiqués L_1, P_1, P'_v, $P'_{v+1} \ldots$ se trouveront donc d'un même côté par rapport à l'espace à r—1 dimensions: $P_2 P_3 \ldots P_{r-1} P_u P_v$, cet espace coupant l'espace $P_1 P_2 \ldots P_{r-1} P_u$ dans l'espace à r—2 dimensions $P_2 P_3 \ldots P_{r-1} P_u$. Les points P_1 et P se trouveront, au contraire, de côtés opposés par rapport à l'espace $P_2 P_3 \ldots P_{r-1} P_u P_v$, r étant impair, et les points L_1, P_1, P'_v, $P'_{v+1} \ldots$ seront donc séparés du point P par cet espace ou, en d'autres termes, l'espace à r—1 dimensions $P_2 P_3 \ldots P_{r-1} P_u P_v$ coupera les segments PL_1, PP'_v, $PP'_{v+1} \ldots PT_1$. Les segments indiqués appartenant à une suite de demi-droites monotone, leur points d'intersection avec l'espace $P_2 P_3 \ldots P_{r-1} P_u P_v$ formera une suite monotone de points.

Nous pouvons continuer de la même manière en considérant, après les espaces à r—1 dimensions $P_1 P_2 \ldots P_{r-1} P_u$ et $P_2 P_3 \ldots P_{r-1} P_u P_v$, les espaces $P_3 P_4 \ldots P_{r-1} P_u P_v P_{v+1}$;

$P_4 \ldots P_{r-1}P_uP_vP_{v+1}P_{v+2}; \ldots ; P_uP_vP_{v+1} \ldots P_{v+r-2}; \ldots$. et nous voyons ainsi que ces espaces à r—1 dimensions couperont la demi-droite l_1 en une suite de points L_1, L_1', L_1'', . . . qui sera monotone; en effet L_1' se trouvera entre P et L_1, L_1'' entre P et L_1' etc. En même temps nous voyons que les espaces indiqués couperont aussi la demi-droite t_1 en une suite de points monotone.

Pour achever la démonstration il faudra maintenant distinguer deux cas suivant que le point O se trouve sur la demi-droite l_1 ou sur l_2.

1°. Le point O est situé sur la demi-droite l_2.

Les points O et P se trouveront alors d'un même côté par rapport aux espaces $P_1P_2 \ldots P_{r-1}P_u$; $P_2P_3 \ldots P_{r-1}$ P_uP_v; . . . , d'ou il résulte que les orientations $(OP_1P_2 \ldots$ $P_{r-1}P_u)$, $(OP_2P_3 \ldots P_{r-1}P_uP_v) \ldots$. seront identiques aux orientations

$$(PP_1P_2 \ldots P_{r-1}P_u),\ (PP_2P_3 \ldots P_{r-1}P_uP_v) \ldots$$

respectivement. Mais les dernières étant identiques entre elles il en sera de même des premières.

Il ne reste maintenant qu'à démontrer que l'orientation $(OP_{i_1}P_{i_2} \ldots P_{i_r})$, $v < i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, est identique à l'orientation $(OP_1P_2 \ldots P_{r-1}P_u)$ pour constater que la suite de demi-droites OP_1, $OP_2 \ldots$ finira par être monotone. Pour démontrer l'identité des deux orientations nous n'aurons qu'a suivre la méthode employée dans le cas de $r = 3$.

2°. Le point O est situé sur la demi-droite l_1.

Les points $L_1L_1'L_1'' \ldots$ formant une suite monotone à point limite P on peut en choisir un qui se trouve entre O et P, et nous pouvons ensuite démontrer, exactement comme dans le cas de $r = 3$, que l'orientation $(OP_{i_1}P_{i_2} \ldots P_{i_r})$ est opposée à $(PP_{i_1}P_{i_2} \ldots P_{i_r})$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, si $i_1, i_2, \ldots i_r$ sont plus grands qu'un certain nombre. Le théorème 18 est ainsi complètement démontré pour r impair.

48. Considérons maintenant le cas de r pair. Au lieu de la suite monotone des points $L_1, L_1', L_1'' \ldots$ sur l_1 nous aurons ici à considérer la suite des points d'intersection L_2, $L_2', L_2'', \ldots$ entre la demi-droite l_2 et les espaces à r—1 dimensions $P_1P_2 \ldots P_{r-1}P_u$; $P_2P_3 \ldots P_{r-1}P_uP_v$; . . . ; il s'agit avant tout de démontrer que cette suite soit monotone.

Nous allons indiquer succinctement la démonstration de ce point capital, les détails de la méthode étant les mêmes que dans le cas de r impair. Les demi-droites: l_2, PP_1, $PP_2, \ldots PP_{r-1}$, PP_u, PP_v, $PP_{v+1}, \ldots$ couperont l'espace à r—1 dimensions $P_1P_2 \ldots P_{r-1}P_u$ aux points: L_2, P_1, $P_2 \ldots$, P_{r-1}, P_u, P_v', $P_{v+1}', \ldots$ qui forment, à compter de P_1, une suite monotone. L'orientation $(L_2P_2 \ldots P_{r-1}P_u)$ étant opposée à $(P_1P_2 \ldots P_{r-1}P_u)$, le point L_2 sera, dans l'espace R_{r-1} indiqué, séparé de P_1 par l'espace à r—2 dimensions $P_2P_3 \ldots P_{r-1}P_u$, et dans l'espace R_r ces deux points seront de côtés opposés par rapport à l'espace à r—1 dimensions $P_2P_3 \ldots P_{r-1}P_uP_v$. D'autre part, les points P_1 et P se trouveront du même côté par rapport à cet espace, r étant pair, et, par suite, L_2 et P se trouveront de côtés opposés, de sorte que le segment PL_2 sera coupé par l'espace indiqué en un point L_2'. On démontre ensuite, par le même raisonnement, que le point L_2'' se trouve entre L_2' et P etc. La démonstration s'achève ensuite comme plus haut dans le cas de r impair.

49. Jusqu'ici nous avons supposé que la suite considérée était normale; mais, le théorème que nous venons de démontrer peut être généralisé. Nous aurons ainsi, par la méthode employée dans le cas de $r = 3$:

Théorème 20. La suite de demi-droites correspondant à une suite fondamentale monotone de points dans un espace à r dimensions par rapport à un point quelconque, finira par être monotone.

Comme corollaire à cette proposition nous avons:

Théorème 21. En faisant la projection centrale d'une suite fondamentale, monotone sur un espace linéaire quelconque on obtient une suite qui finira par être monotone.

50. Nous démontrerons encore la proposition suivante:

Théorème 22. L'espace osculateur à $r-1$ dimensions d'une suite fondamentale monotone $P_1 P_2 \dots$ dans un espace à r dimensions peut être défini comme la position limite unique de l'espace à $r-1$ dimensions $P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_r}$ lorsque les indices $i_1, i_2, \dots i_r$ croissent à l'infini, de manière seulement que les points $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_r}$ ne soient jamais contenus dans le même espace à $r-2$ dimensions.

Il faut naturellement supposer que la suite donnée ne finisse pas par être contenue dans un espace à r—2 dimensions. La proposition se démontre en appliquant le théorème 20. La suite donnée étant bornée, il y aura certainement, pour l'espace indiqué, au moins une position limite. Supposons qu'il en existe deux α et β qui soient distinctes. Nous pourrions alors trouver un point O tel que l'orientation $(O P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{ir})$ convergerait vers deux orientations opposées suivant qu'on passerait à la limite de l'une ou de l'autre manière; mais cela serait contraire au théorème 20.

On peut définir, d'une manière analogue, le demi-espace osculateur, et on peut aller plus loin en considérant l'espace osculateur R_p à un nombre quelconque p de dimensions, $p < r$. L'espace osculateur R_p se définit comme la position limite de l'espace $P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{ip+1}$, les indices i_1, $i_2, \dots i_{p+1}$ croissant à l'infini de manière que les points $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_{p+1}}$ ne soient jamais contenus dans un espace à p—1 dimensions. Nous supposons naturellement que la suite donnée ne finit pas par être contenue dans un espace à p—1 dimensions.

51. En terminant ce chapitre nous pouvons remarquer que le théorème 16 peut être facilement généralisé à l'espace R_r et qu'il en est de même de la construction d'une suite monotone dans l'espace R_3 indiquée au n° 36. Le théorème 17 se généralise immédiatement de la manière suivante:

Théorème 23. Une suite infinie de points, $P_1 P_2 P_3 \ldots$, dans l'espace R_r sera monotone si les conditions suivantes sont satisfaites:

1°. La suite ne finit pas par être situé dans un espace R_{r-1}.

2°. Le demi-espace à r dimensions, limité par l'espace à r—1 dimensions: $P_s P_{s+1} \ldots P_{s+r-1}$, et passant par le point P_{s+r} converge vers un demi-espace unique lorsque s croît à l'infini.

Une proposition analogue est valable pour les suites de demi-droites.

VI.

Expression analytique des résultats trouvés.

52. Considérons une matrice à r colonnes et à un nombre infini de séries:

$$\left|\begin{array}{llcl} x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots\ldots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots\ldots\ldots & x_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_{i1} & x_{i2} & \ldots\ldots\ldots & x_{ir} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{array}\right| ,$$

la matrice ne contenant aucune série composée entièrement de zéros.

Nous supposons que la matrice est »monotone« en entendant par là que tous les déterminants d'ordre r, contenus dans la matrice, ont le même signe, à l'exception naturellement des déterminants nuls, les déterminants d'ordre r ne devant pas être tous nuls.

Deux déterminants d'ordre k, $k < r$, contenus dans la matrice, sont dits assimilés si les éléments de leurs séries appartiennent aux mêmes séries de la matrice donnée.

A chaque système de k, $k < r$, séries de la matrice correspond ainsi un système de $\binom{r}{k}$ déterminants assimilés d'ordre k que nous supposerons ordonnés d'après une loi déterminée, choisis à volonté, mais les mêmes pour tous les systèmes.

53. Cette définition posée, nous avons la proposition suivante :

Théorème 24. Une matrice monotone étant donnée, les rapports des déterminants assimilés d'un ordre déterminé convergent vers des limites déterminées lorsque les numéros d'ordre des séries correspondantes de la matrice croissent indéfiniment.

Nous devons ici supposer qu'en supprimant dans la matrice un nombre fini de séries, tous les déterminants d'ordre k ne deviennent pas nuls, et, en passant à la limite, nous devons omettre les systèmes de déterminants assimilés tous nuls, s'il y en a.

Cette proposition n'est en réalité que la traduction en langage analytique du théorème 22, ou plutôt du théorème analogue pour les suites monotones de demi-droites. En effet, considérons la suite de demi-droites $p_1, p_2 \ldots$ définie en prenant pour cosinus directeurs de la droite p_i par rapport à un système de coordonnées rectangulaires des nombres proportionnels à x_{i1}, $x_{i2}, \ldots$ x_{ir}. D'après notre hypothèse sur la matrice cette suite sera monotone ; donc l'espace à k dimensions, déterminé par k demi-droites de la suite qui ne sont pas contenus dans un espace à moins de k dimensions, convergera vers une position limite, les indices des demi-droites croissant indéfiniment. Le théorème 24 est ainsi démontré.

En particulier, il résulte du théorème 24 que les rapports $x_{i1} : x_{i2} : \ldots : x_{ir}$ ont des limites déterminées.

54. Du théorème 20 nous pouvons encore déduire la proposition suivante:

> Théorème 25. La matrice formée par p colonnes quelconques d'une matrice monotone finira par être monotone c. à d. qu'en supprimant un nombre fini de ses séries on peut former une matrice monotone.

En effet, nous n'avons qu'à appliquer le théorème 20 en faisant la projection de la suite de demi-droites $p_1, p_2, \ldots$, considérée plus haut, sur l'espace à p dimensions déterminés par p quelconques des axes coordonnés.

VII.

Les arcs monotones.

55. Un arc borné, situé dans un espace R_r à r dimensions, mais qui n'est pas contenu dans un R_{r-1}, est dit *monotone* si tout système de $r+1$ de ses points, pris dans leur ordre de succession sur l'arc, celui-ci étant muni d'un sens de parcours déterminé, présentent, dans R_r, une orientation constante (ou nulle). Nous pouvons définir, d'une manière analogue, la notion d'un *cône monotone*. Nous supposerons, dans ce qui suit, que l'arc ne possède pas de points doubles; mais cette supposition n'est point essentielle, les cas spéciaux qu'on pourrait rencontrer si on voulait considérer de tels points se traitant facilement sans présenter, du reste, un intérêt particulier.

En remarquant que, l'arc étant monotone, une suite de points qui est monotone sur l'arc considéré sera encore monotone dans R_r, on peut déduire du théorème 21 que chacune de ces suites monotones aura un espace osculateur R_p, $p < r$, déterminé, en supposant seulement que la suite ne finisse pas par être contenue dans un espace R_{p-1}. La proposition suivante se démontre ensuite immédiatement:

Théorème 26. *Soit, dans un espace R_r, un arc monotone AB et un point intérieur P qui le partage en deux arcs partiels PA et PB. Il existera alors au point P, pour les deux arcs AP et PB, des espaces osculateurs R_p, p ayant une valeur quelconque plus petite que r. Chacun de ces espaces osculateurs R_p est défini comme la position limite unique d'un espace variable R_p passant par $p+1$ points, linéairement indépendants, — c. à d. non contenus dans le même espace R_{p-1}, — variant sur l'un ou l'autre des arcs AP et PB et convergeant vers le point P.*

Pour qu'on puisse affirmer l'existence de l'espace R_p correspondant à l'arc AP, par exemple, il faut encore supposer, que cet arc ne contienne pas un arc contenu dans un espace R_{p-1} et aboutissant au point P.

Le point P variant d'une manière continue sur l'arc AB, dans une direction déterminée l'espace osculateur correspondant à la direction choisie variera aussi d'une manière continue.

On peut encore définir, au point P, des demi-espaces osculateurs par rapport aux arcs AP et PB.

56. Le théorème 21 nous conduit encore à la proposition suivante:

Théorème 27. En faisant la projection centrale d'un arc monotone, situé dans l'espace R_r sur un espace R_{r-1}, on obtient un arc composé d'un nombre fini d'arcs monotones.

Remarquons, en premier lieu, qu'il sera possible de délimiter de part et d'autre d'un point quelconque P de l'arc obtenu AB, des arcs monotones. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il serait possible de trouver sur AB une suite fondamentale, à point limite P, qui fut monotone sur AB sans être, au moins à la fin, monotone dans l'espace contenant cet arc; mais cela serait contraire au théorème 21.

Cela posé, la démonstration s'achève ensuite facilement de la manière suivante. Soit, sur l'arc AB, AM_1 le plus grand arc monotone partant de A, puis, sur l'arc M_1B, M_1M_2 le plus grand arc monotone partant de M_1 et ainsi de suite. De cette manière nous parvenons à partager l'arc AB en un nombre fini d'arcs monotones. En effet, dans le cas contraire il se trouverait sur AB un point M, point limite de la suite infinie M_1, M_2, ... duquel il ne partirait aucun arc monotone contenu dans l'arc AM, mais cela serait contraire à la remarque précédente.

57. Un arc monotone, situé dans un espace à r dimensions, dont aucune partie continue ne se trouve dans un espace à moins de r dimensions, ne peut avoir plus de r points en commun avec un espace R_{r-1}. Inversement, un arc sera monotone s'il a au plus r points en commun avec un espace R_{r-1} quelconque. En effet, considérons $r+2$ points quelconques P_1, P_2, ... P_{r+2} se succédant sur l'arc. Si r est pair, l'espace R_{r-1} passant par $P_2P_3 \ldots P_{r+1}$ aura les points P_1 et P_{r+2} de même côté, car dans le cas opposé cet espace aurait avec l'arc un nombre impair de points d'intersection. Si r est impair P_1 et P_{r+2} seront de côtés opposés par rapport à l'espace indiqué.

Dans les deux cas les orientations $(P_1 P_2 \ldots P_{r+1})$ et $(P_2 P_3 \ldots P_{r+2})$ seront donc identiques, et la proposition que nous avions en vue en résulte immédiatement.

58. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des suites monotones, bornées; en réalité cette restriction n'est pas nécessaire. En effet, un arc quelconque dans un R_r peut toujours être considéré comme situé sur un cône, et d'après ce que nous venons de démontrer, si l'arc donné est composé d'un nombre fini d'arcs monotones le cône sera composé d'un nombre fini de cônes monotones. Les résultats trouvés plus haut pour des arcs monotones bornés se généralisent donc immédiatement à des arcs monotones quelconques sans points doubles, même s'ils contiennent des points à distance infinie. Nous voyons ainsi qu'un arc, situé dans un espace R_r et ayant au plus r points en commun avec un R_{r-1} quelconque, sera toujours composé d'un nombre fini d'arcs monotones, et qu'en faisant la projection centrale d'une tel arc on obtient toujours un arc composé d'un nombre fini d'arcs monotones.

59. Considérons un point quelconque P d'un arc monotone AB à direction positive de A à B, et soient P' et P'' deux points situés sur les arcs AP et PB respectivement. Si l'on fait converger les points P' et P'' vers le point P, la sécante $P'P''$, sur laquelle nous choisirons la direction de P' à P'' comme direction positive, convergera vers une droite, passant par P, munie d'une direction positive déterminée. Une telle droite est appellée une sécante limite orientée.

Si les arcs PA et PB ont, au point P, des demi-tangentes opposées, la droite qui porte ces demi-tangentes, — c. à d. la tangente au point P_1 — sera la seule sécante limite passant par P.

Supposons, au contraire, que les demi-tangentes p_1 et p_2 au point P, correspondantes aux arcs PA et PB respectivement, se trouvent sur des droites distinctes; l'arc étant supposé monotone, les demi-tangentes ne peuvent jamais être confondues. Dans ce cas il y aura, au point P, des sécantes limites orientées en nombre infini, couvrant entièrement l'angle plan formé par la demi-droite p_2 et le prolongement de la demi-droite p_1 au-delà de P, ces demi-droites étant elles-mêmes des sécantes limites. Nous considérons la demi-tangente au point A et le prolongement de la demi-tangente au point B comme les sécantes limites orientées correspondant aux points extrêmes A et B de l'arc considéré.

Concevons un ensemble de demi-droites ayant pour base un point quelconque O et parallèles aux sécantes limites de l'arc AB. Ces demi-droites couvriront entièrement un secteur conique que nous appellerons le cône directeur de l'arc considéré. Cela posé, nous pouvons démontrer la proposition suivante:

Théorème 28. Le cône directeur d'un arc monotone est lui-même monotone ou, au moins, il est composé d'un nombre fini de parties monotones.

En effet, considérons sur l'arc AB une suite monotone de points: $P_1 P_2 P_3 \ldots$ à point limite P. De part et d'autre du point P_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) nous choisirons ensuite des points P_i' et P_i'' de façon que la nouvelle suite $P_1' P_1 P_1'' P_2' P_2 P_2'' \ldots P_i' P_i P_i'' \ldots$ soit encore monotone à point limite P. Cela posé, menons du point O les demi-droites $\pi_1', \pi_2', \ldots \pi_i' \ldots$ respectivement parallèles à $P_1' P_1''$, $P_2' P_2''$, $\ldots P_i' P_i'' \ldots$, ces demi-droites formeront alors une suite finissant par être monotone.

Faisons maintenant converger P_i' et P_i'' vers P_i ($i = 1, 2, 3 \ldots$) d'après une loi telle que les sécantes $P_i' P_i''$ convergent vers des sécantes limites déterminées p_i passant par P_i respectivement. Les demi-droites π_i' convergeront alors vers des positions limites π_i, ayant les directions des p_i, et formant une suite qui finit par être monotone. Nous avons ainsi démontré que toute suite fondamentale ordonnée de génératrices du cône directeur formeront, dans l'espace, une suite qui finira par être monotone; mais de là s'ensuit que le cône directeur sera composé d'un nombre fini de secteurs coniques monotones, ce qu'il fallait démontrer. On voit encore que les espaces osculateurs du cône directeur seront parallèles aux espaces osculateurs correspondants de l'arc donné.

60. En faisant une transformation projective ou bien en altérant légèrement la démonstration précédente, nous parviendrons à la proposition suivante, d'une grande importance:

Théorème 29. La surface réglée formée par toutes les sécantes limites d'un arc monotone coupe un espace R_{r-1} en un arc composé d'un nombre fini d'arcs monotones.

61. Nous pouvons établir la condition suivante pour qu'un arc soit composé d'un nombre fini d'arcs monotones:

Théorème 30. Pour qu'un arc, situé dans un espace à r dimensions, soit composé d'un nombre fini d'arcs monotones, il faut et il suffit qu'en prenant de part et d'autre d'un point quelconque P de l'arc deux suites, chacune de $r+1$ points, $P_1, P_2, \ldots P_r, P_{r+1}$, et $P_1', P_2', \ldots P_r' P'_{r+1}$, ordonnées de sorte que P_i et P_i' $(i = 2, \ldots r+1)$ se trouvent entre P_{i-1} et P, respectivement entre P'_{i-1} et P, les demi-espaces $P_1 P_2 \ldots P_r (P_{r+1})$ et $P_1' P_2' \ldots P_r' (P'_{r+1})$, ayant pour bases les espaces $P_1 P_2 \ldots P_r$ et $P_1' P_2' \ldots P_r'$ et passant par P_{r+1} et P'_{r+1} respectivement convergent vers deux positions limites déterminées, lorsque les points indiqués convergent tous vers le point P.

D'après ce qui précède la condition est nécessaire; qu'elle soit aussi suffisante, c'est ce qui résulte du théorème 23. En effet, d'après ce théorème, si la condition est satisfaite, toute suite ordonnée de points de l'arc ayant pour limite un point P, sera aussi monotone dans l'espace R_r, d'où il résulte que l'arc sera bien un arc monotone.

VIII.

Applications diverses à la théorie des courbes.

62. Les propositions générales relatives à des arcs monotones auxquelles nous sommes parvenus dans le chapitre précédent permettent une foule d'applications spéciales à la théorie des courbes; dans ce qui suit nous en donnerons quelques exemples en commençant par la proposition suivante:

Théorème 31. Soit une courbe plane, bornée, $y = f(x)$ ayant la propriété d'avoir au plus r points en commun avec la parabole d'ordre $r-1$

$$by = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1},$$

pour des valeurs quelconques — non toutes nulles — des constantes $b, a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$. Il existera alors, pour tout point P de la courbe, les points extrêmes exclus, deux paraboles osculatrices d'ordre p, $p \leqq r-1$, bien déterminées, ayant au point P contact avec la courbe respectivement de part et d'autre de ce point, les équations de ces paraboles ayant la forme $\beta y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p$. Une parabole osculatrice d'ordre p résultera comme position limite d'une parabole d'ordre p passant par $p+1$ points variables de la courbe, situés du même côté par rapport au point P, lorsque ces points convergent vers P d'une manière quelconque.

Si le point P varie, sur la courbe, d'une manière continue dans une direction déterminée, la parabole osculatrice correspondant à cette direction variera aussi d'une manière continue.

Pour démontrer ce théorème, faisons correspondre au point quelconque (xy) du plan un point $(x_1, x_2, \ldots x_r)$ d'un espace R_r à r dimensions, les coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_r$ étant déterminées par les équations

$$x_1 = x,\ x_2 = x^2, \ldots x_{r-1} = x^{r-1},\ x_r = y.$$

Au plan entier correspondra ainsi, dans l'espace R_r, une variété à deux dimensions déterminée par les équations

$$x_2 = x_1^2,\ x_3 = x_1^3, \ldots x_{r-1} = x_1^{r-1}.$$

A la courbe $y = f(x)$ correspondra une courbe φ dans cette variété, et la parabole $by = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1}$ sera représentée sur la courbe d'intersection de la variété indiquée avec l'espace R_{r-1}:

$$b x_r = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{r-1} x_{r-1}.$$

Maintenant la courbe φ sera monotone dans l'espace R_r, n'ayant, d'après nos suppositions, que r points en commun avec un espace à $r-1$ dimensions; et, d'après le théorème 26, il y aura donc pour chaque point intérieur des espaces osculateurs R_{r-1} déterminés ayant contact avec la courbe φ, au point considéré, de part et d'autre de ce point.

Dans le plan, correspondra à cet espace osculateur, que nous supposerons déterminé par l'équation

$$\beta x_r = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{r-1} x_{r-1}$$

la courbe $\beta y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{r-1} x^{r-1}$

qui est, justement, la parabole d'ordre $r-1$ dont il s'agissait de démontrer l'existence.

En faisant la projection de la courbe φ sur l'espace coordonné déterminé par les axes coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_p, x_r$

nous arriverons à un arc composé d'un nombre fini d'arcs monotones et les espaces osculateurs d'ordre p de cet arc à un point P intérieur nous donnent ensuite immédiatement les paraboles osculatrices d'ordre p de la courbe plane donnée, ces paraboles ayant des équations de la forme

$$\beta y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_p x^p.$$

Des considérations précédentes nous pouvons encore tirer la conclusion que la courbe $y = f(x)$ peut être divisée en un nombre fini d'arcs tels que chacun d'entre eux n'ait que $p + 1$ points au plus en commun avec une parabole d'ordre p dont l'équation a la forme indiquée.

En particulier nous voyons que la courbe donnée sera composée d'un nombre fini d'arcs convexes.

63. Les résultats trouvés resteront valables si l'on substitue au système de paraboles considéré un système linéaire quelconque de courbes algébriques. Si la courbe $y = f(x)$ a au plus p points en commun avec une courbe quelconque d'un tel système, d'un nombre de dimensions égal à p, il y aura, pour tout point intérieur P, deux courbes osculatrices, bien déterminées, appartenant au système, ayant au point P un contact avec la courbe de part et d'autre de ce point.

Une courbe osculatrice sera la position limite d'une courbe du système passant par p points variables de l'arc, situés tous du même côté par rapport au point P, et convergeant vers P.

Au lieu des systèmes de courbes algébriques on peut naturellement considérer des systèmes linéaires quelconques, par exemple le systèmes des intégrales d'une équation différentielle linéaire.

64. Comme exemple d'une application à l'espace à trois dimensions, citons la proposition suivante:

Théorème 32. Une courbe à double courbure bornée, ayant au plus quatre points en commun avec une sphère quelconque, aura cette propriété qu'il existera, pour chaque point intérieur P deux sphères osculatrices pouvant se confondre en une seule, ayant au point P un contact avec la courbe respectivement de part et d'autre de ce point. Chacune de ces sphères sera la position limite d'une sphère passant par quatre points variables de la courbe situés tous du même côté par rapport au point P, les points convergeant vers ce point d'après une loi quelconque. De plus, il y aura, de part et d'autre du point P, un cercle osculateur déterminé, position limite d'un cercle passant par trois points variables de la courbe, convergeant vers le point P en restant tous du même côté par rapport à ce point.

La courbe sera du même temps composée d'un nombre fini d'arcs monotones.

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du théorème 31. En effet, nous ferons correspondre à un point quelconque (x, y, z) de l'espace à trois dimensions un point (x_1, x_2, x_3, x_4) de l'espace R_4 en posant

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = x^2 + y^2 + z^2.$$

A l'espace entier correspondra ainsi, dans l'espace R_4, une variété à trois dimensions définie par l'équation

$$x_4 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2,$$

tandis qu'à une sphère ayant pour équation

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

correspondra une variété à deux dimensions définie par ces deux équations prises ensemble. A la courbe donnée correspondra enfin une courbe située dans la variété à trois dimensions indiquée. Cela posé, la démonstration s'achève ensuite aisément en appliquant les résultats trouvés relatifs aux arcs monotones.

Nous pourrions citer encore une foule de propositions analogues, mais nous nous arrêtons là, la méthode de démonstration étant toujours la même: on transforme la courbe considérée en un arc monotone en la représentant sur un espace à un nombre de dimensions plus élevé.

IX.

Sur les arcs représentés par des fonctions différentiables.

65. Considérons, dans un espace à r dimensions, un arc fini représenté, dans un système de coordonnées rectangulaires, par les équations

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots\ x_r = x_r(t),$$

t étant un paramètre variable qui parcourt un intervalle fini en croissant constamment.

Nous considérons sur l'arc $r + 1$ points correspondant aux valeurs $t_1, t_2, \ldots t_{r+1}$ du paramètre, $t_1 < t_2 < \ldots < t_{r+1}$. Plus tard nous ferons converger toutes ces valeurs vers une valeur déterminée t.

Le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \ldots\ldots & x_{r+1}(t_1) & 1 \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \ldots\ldots & x_{r+1}(t_2) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1(t_{r+1}) & x_2(t_{r+1}) & \ldots & x_{r+1}(t_{r+1}) & 1 \end{vmatrix}$$

nous indique par son signe l'orientation dans l'espace des $r + 1$ points considérés.

En introduisant les quotients des différences:

$$\Delta x_i(t_1, t_2) = \frac{x_i(t_1) - x_i(t_2)}{t_1 - t_2}$$

$$\Delta^2 x_i(t_1, t_2, t_3) = \frac{\Delta x_i(t_1, t_2) - \Delta x_i(t_2, t_3)}{t_1 - t_3}$$

etc.

et en supprimant un facteur à signe invariable, le déterminant se transforme comme il suit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta x_1(t_1, t_2) & \Delta x_2(t_1, t_2) \ldots\ldots\ldots & \Delta x_r(t_1, t_2) \\ \Delta^2 x_1(t_1, t_2, t_3) & \Delta^2 x_2(t_1, t_2, t_3) \ldots\ldots & \Delta^2 x_r(t_1, t_2, t_3) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \Delta^r x_1(t_1, t_2 \ldots t_{r+1}) & \Delta^r x_2(t_1, t_2 \ldots t_{r+1}) \ldots & \Delta^r x_r(t_1, t_2 \ldots t_{r+1}) \end{vmatrix}$$

Supposons maintenant que les fonctions $x_i(t)$ soient r fois différentiables, les dérivés d'ordre r $x_i^{(r)}(t)$ étant continus, si l'on fait converger $t_1, t_2, \ldots t_{r+1}$ vers t le déterminant Δ convergera vers Δ' donné par

$$\Delta' = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \ldots & x_r' \\ x_1'' & x_2'' \ldots & x_r'' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} \ldots & x_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

Cela posé, nous pouvons démontrer que, si ce déterminant a un signe invariable partout dans l'intervalle en question, l'arc considéré sera composé d'un nombre fini d'arcs monotones. En effet, on peut faire correspondre à chaque valeur de t un intervalle fini dans lequel Δ, et par conséquent D, a le même signe que Δ', que nous supposons de signe invariable. A tout point de l'arc considéré nous pouvons donc faire correspondre un arc monotone fini contenant le point.

D'une manière plus générale, nous pouvons dire que si le déterminant Δ' n'a, dans l'intervalle donné, qu'un nombre fini de zéros, l'arc considéré sera composé d'un nombre fini d'arcs monotones.

En particulier tout arc analytique sans points singuliers essentiels sera composé d'un nombre fini d'arcs monotones.

X.

Sur la construction d'un arc monotone quelconque.

66. Considérons, dans un espace à r dimensions, un arc monotone AB. Un point quelconque P de AB sera déterminé si l'on donne la longueur s de l'arc AP et la direction de la demi-tangente au point P, prise de manière à correspondre au sens de parcours AB.

Soit, dans un système de coordonnées rectangulaires, α_1, α_2, ... α_r les cosinus directeurs de la demi-tangente. α_1, α_2, ... α_r seront des fonctions uniformes de s

$$\alpha_1 = \alpha_1(s),\ \alpha_2 = \alpha_2(s),\ \ldots\ \alpha_r = \alpha_r(s),$$

que nous supposerons continues tant à droite que à gauche; le cas général où les fonctions, continues à droite, ne le sont pas nécessairement à gauche, ne présentent pas de difficultés, le cas particulier une fois traité.

D'après le théorème 28 le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1(s_1) & \alpha_2(s_1) \ldots & \alpha_r(s_1) \\ \alpha_1(s_2) & \alpha_2(s_2) \ldots & \alpha_r(s_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1(s_r) & \alpha_2(s_r) \ldots & \alpha_r(s_r) \end{vmatrix}$$

aura un signe invariable lorsque $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_r$, au moins pour des valeurs de $s_r - s_1$ moindres qu'un certain nombre S. Si l'arc AB ne contient aucune partie qui soit contenue dans un espace à moins de r dimensions, nous pouvons supposer $D > 0$ en choisissant convenablement le système des coordonnées.

Prenons inversement des fonctions continues $\alpha_i(s)$, $i = 1,2,3 \ldots r$, telles que

$$\sum_{i=1}^{r} (\alpha_i(s))^2 = 1$$

$$\text{et} \quad D > 0.$$

Les équations $\alpha_i = \alpha_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \ldots r$, définiront alors un arc monotone, s désignant la longueur d'arc AP comptée à partir d'un point arbitraire A et la demi-tangente au point courant P ayant pour cosinus directeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$, la direction de la demi-tangente étant celle qui correspond au sens de parcours AP. Les coordonnées $x_1, x_2, \dots x_r$ du point P sont déterminées par les équations

$$x_i = \int_0^s \alpha_i(s)\,ds, \quad i = 1, 2, \dots r.$$

Démontrons que ces équations définissent bien un arc monotone. Un espace quelconque à $r-1$ dimensions ne peut couper cet arc en plus de r points. En effet, supposons qu'il y ait $r+1$ points d'intersection $P_1, P_2, \dots P_{r+1}$. On peut alors déterminer sur les arcs $P_1P_2, P_2P_3, \dots P_rP_{r+1}$ des points $Q_1, Q_2, \dots Q_r$ tels que les tangentes soient parallèles à l'espace R_{r-1}; pour ces points le déterminant D aura donc la valeur zéro, ce qui est impossible, ce déterminant étant supposé positif et non nul. L'arc que nous venons de construire est donc bien monotone en satisfaisant à toutes les conditions posées.

67. Un arc est dit *ordinaire* si, en tous ses points, les deux demi-tangentes sont opposées.

Le cône directeur d'un arc ordinaire correspondant à un sens de parcours déterminé est un demi-cône ayant ses génératrices parallèles aux demi-tangentes de l'arc, celles-ci étant prises avec une direction correspondant au sens de parcours choisi.

Le résultat que nous venons de démontrer peut maintenant s'énoncer ainsi

Théorème 33. *Un arc ordinaire sera monotone si le cône directeur, correspondant à un sens de parcours déterminé, est monotone;*

ou encore:

Théorème 34. *Si le cône directeur d'un arc ordinaire est composé d'un nombre fini de sec-*

teurs coniques monotones, l'arc sera composé d'un nombre fini d'arcs monotones.

En faisant une transformation projective, nous pouvons aisément démontrer la proposition suivante:

Théorème 35. Si la courbe d'intersection de la surface tangentielle d'un arc ordinaire situé dans un espace à r dimensions, avec un certain espace R_{r-1} est composée d'un nombre fini d'arcs monotones, il en sera de même de l'arc donné.

D'après ce qui précède, nous pouvons construire de la manière suivante des arcs monotones dans l'espace à r dimensions. Nous partons d'un arc convexe dans le plan; avec cet arc comme directrice nous construisons, dans R_3, un secteur conique convexe, puis un arc monotone dans R_3 ayant le secteur pour cône directeur, et ainsi de suite.

Dans cette étude nous n'avons considéré que des arcs tels que les espaces osculateurs en un point quelconque, en avant et en arrière, soient confondus, mais les résultats peuvent être aisément étendus aux arcs contenant des points qui ne satisfont pas à cette condition; les points de cet espèce ne peuvent former qu'un ensemble dénombrable.

Ayant appris maintenant à construire un arc monotone quelconque dans un espace à r dimensions, nous pouvons aussi construire les courbes étudiées au chap. VIII.